黎曼 Zeta 函数方程的不一致性问题

—— 黎曼 1859 年的原始论文中的三个基本错误

梅 晓 春

理论物理与纯粹数学部 福州原创物理研究所

内容摘要 本文揭示黎曼的原始论文中存在的三个基本问题，证明黎曼猜想没有意义。1. 黎曼在推导 Zeta 函数的积分形式时，采用的一个求和公式。这个公式的可使用条件是 $x>0$，在 $x=0$ 处该公式没有意义。然而黎曼的计算过程中涉及到积分的下限是 $x=0$，由此导致 Zeta 积分形式的发散和函数方程的不一致性。2. 在复平面的实数轴上，黎曼 Zeta 函数方程的左边有限时，右边可能为无穷大，反之亦然。在实数轴上，黎曼 Zeta 函数方程只在 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 点上成立。然而在这个点上 Zeta 函数等于无穷大，而不是零。因此黎曼 Zeta 方程不成立。3. 黎曼在证明 Zeta 函数方程的对称性时，使用了雅可比函数的一个公式 $\theta(x)=\sqrt{x}\theta(1/x)$。该公式成立的条件也是 $x>0$，如果 $x=0$，该公式没有意义。同样由于计算过程涉及到积分的下限是 $x=0$，这个公式也不能用。本文最后讨论黎曼 Zeta 函数零点的计算，指出现有的计算采用的都是近似方法，原复变函数的解析性被破坏，柯西-黎曼方程无法得到满足。虽然在复平面 Re(s)=1/2 的直线上找到的大量非平凡零点，但它们都不是 Zeta 函数真正的零点。

关键词： 黎曼猜想，黎曼 Zeta 函数，Zeta 函数方程，留数定理，雅可比函数，伽马函数，解析函数，柯西定理，柯西-黎曼方程

一 前言

黎曼 Zeta 函数是现代数学中一个很重要的函数，被用于素数的研究。黎曼猜想是关于黎曼函数的零点问题的猜想，黎曼 1859 年提出，至今无法得到证明。本文仔细分析了黎曼推导 Zeta 函数积分形式和 Zeta 函数方程的过程，发现黎曼原始论文中存在三个基本错误。由此揭示黎曼猜想问题长期无法解决的本质原因，证明黎曼猜想没有意义。

黎曼 Zeta 函数有两种形式，级数求和形式和积分形式。级数求和形式是最初始的，定义为[1]：

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots \tag{1}$$

其中 $s=a+ib$ 是复数。如果 $b=0$，$a>1$ 时级数收敛，$a\le 1$ 时级数发散。比如：

$$\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\to\infty \qquad \zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(-2)=1+2^2+3^2+4^2+\cdots\to\infty \tag{2}$$

原文发表于 Mathematics Letters, 2019; 5(2): 13-22., doi: 10.11648/j.ml.20190502.11

其中$\zeta(1)$是调和级数，$\zeta(2)$是欧拉公式。如果$b\neq 0$，一般认为s的实部$Re(s)>1$时（1）式收敛，$Re(s)\leq 1$时（1）式发散，没有意义。

为了使（1）式在$Re(s)<1$的区间也有意义，黎曼利用Gama函数，把（1）式的级数求和形式用以下的积分形式来表示（$x\in R$）【1】,【2】,【3】:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^{x}-1}dx \qquad Re(s)>1 \qquad (3)$$

为了计算（3）式，黎曼将它延拓为复平面的积分，得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{K}\frac{(-z)^{s-1}}{e^{z}-1}dz \qquad Re(s)\neq 1 \qquad (4)$$

函数的定义域从（3）式的$Re(s)>1$扩展到（4）式的$Re(s)\neq 1$。利用留数计算方法，黎曼从（4）式导出以下Zeta函数方程：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1-s)} \qquad Re(s)\neq 1 \qquad (5)$$

再考虑（1）式,（5）式一般被写为：

$$\zeta(s)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\zeta(1-s) \qquad Re(s)\neq 1 \qquad (6)$$

（6）式被认为在复平面上除了$Re(s)$=1的点外都成立【2】。黎曼然后引入变换【1】【4】:

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \qquad (7)$$

证明存在对称关系：

$$\xi(s)=\xi(1-s) \qquad (8)$$

由于函数$\zeta(s)$和$\xi(s)$有相同的零点，对Zeta函数的零点计算实际上是在（7）式的基础上进行的。按照（7）式，$s=\pm 2k$（$k=0,1,2,3,\cdots$）时，$\zeta(s)=0$时。对于$s=-2k$的情况，零点被称为Zeta函数的平凡零点。对于$s=+2k$的情况，目前的理论一般不予讨论。

除了平凡零点，Zeta函数被认为还有很多零点，称为非平凡零点【5】【6】。由于素数的分布性质被认为与Zeta函数的零点有关，零点判断就成了一个重要的问题。黎曼猜想认为，Zeta的函数的所有非平凡零点都位于复平面$\mathrm{Re}(s)$=$1/2$的直线上，但一百多年来一直无法证明【6】【7】。

本文重新分析了黎曼推导Zeta函数方程的原始论文，发现存在以下三个问题。

1. 黎曼在推导Zeta函数的积分形式时，使用了以下级数求和公式（黎曼的原始论文没有列出这个公式，但实际上用了这个公式）【8】:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}=e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots=e^{-x}(1+e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots)$$

$$=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^{x}-1} \qquad 0<x\leq\infty \qquad (9)$$

该公式的适用条件是$x>0$，在$x=0$点该公式是没有意义的。然而黎曼的计算过程中涉及到积分的下限是$x=0$，因此这个公式不能用。正是由于使用了这个公式，导致黎曼 Zeta 函数方程的不一致性，得出许多互相矛盾的，没有意义的结果。

2. 比如，经过复延拓后得到的（5）和（6）式被认为在复平面上除了$Re(s)\neq 1$（$a\neq 1$）点外的其他点上都成立，然而情况并不是这样。在复平面$b=0$的实数轴上，（5）式在$a=1/2$的点成立。但此时 Zeta 函数方程的两边都等于无穷大，而不是等于零。因此在实轴上$a=1/2$的点是黎曼 Zeta 函数的无穷大点，而不是零点。

又比如，对于a是非整数的情况，当$|a|>1$时，如果函数方程的左边是收敛的，方程的右边则是无穷大，反之亦然。当$0<a<1$时，方程的两边都是无穷大，没有意义。

3. 黎曼在证明（8）式时，使用了雅可比函数公式$\theta(x)=\sqrt{x}\theta(1/x)$【9】。该式成立的条件是$x>0$，否则$1/x\to\infty$没有意义。由于证明过程中涉及到积分的下限是$x=0$，这个公式也不能用，Zeta 函数的对称性关系$\xi(s)=\xi(1-s)$不存在。

本文最后讨论黎曼 Zeta 函数的零点计算问题。目前通过人工计算和计算机技术，已经找到黎曼 Zeta 函数大量的非平凡零点，但它们都不是 Zeta 函数的真正的零点。原因在于黎曼 Zeta 函数零点的计算采用的是近似方法，解析函数满足的柯西-黎曼方程被破坏，得到的零点都不是严格的 Zeta 函数真正的零点。

二 黎曼$\zeta(s)$函数方程的推导

2.1 黎曼 Zeta 函数积分形式的推导

黎曼 1859 年的原始论文写得非常简略，后人做了许多补充。为了看出存在的问题，我们首先详细复述黎曼原始论文的内容。黎曼从$\Gamma(s)$函数推导 Zeta 函数的积分形式【1】,【2】,【3】。$\Gamma(s)$函数的定义是：

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \qquad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{10}$$

其中$x\in R$是实数，$s=a+ib\in C$是复数，且$\mathrm{Re}(s)>0$。令$x\to nx$，可得：

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx=\int_0^\infty e^{-(nx)}(nx)^{s-1}d(nx)=n^s\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx \tag{11}$$

有：

$$\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\right)\Gamma(a)=\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\right)x^{s-1}dx \tag{12}$$

然后，黎曼将（9）式代入（12）式，并利用（1）式，得到：

$$\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-s}\right)\Gamma(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \tag{13}$$

下文我们将看到，由于（9）式在$x=0$时是不能用的，而（13）的积分下限是零，就导致黎曼 Zeta 函数方程的一系列相互矛盾的结果。

为了计算（13）式，黎曼将对实数的 x 积分扩展到复数 $z=x+iy\in C$，定义函数 $I(z)$，令：

$$I(s)=\int_{L}\frac{(-z)^{s-1}}{e^{z}-1}dz \qquad \mathrm{Re}(s)\neq 1 \tag{14}$$

函数的定义域从原来的 $\mathrm{Re}(s)>1$ 扩大到除 $s=1$ 点之外的整个复平面【2】。积分路径 L 如图 1 所示，先沿 x 轴下方的直线 B 从 $x\to\infty$ 到 $x=\delta$，δ 是一个小量。然后沿半径为 $\sqrt{x^2+y^2}=\delta$ 的圆周 Ω 绕过原点，再沿 x 轴上方的直线 A 从 $x=\delta$ 到 $x\to\infty$。

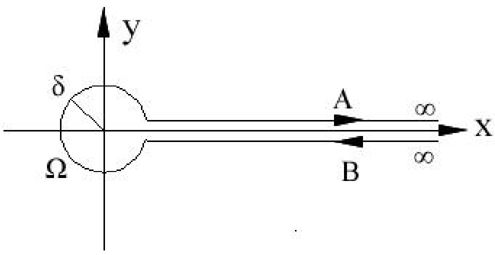

图 1. 黎曼 Zeta 函数积分形式的推导

按照图 1，（14）式可以写成三项：

$$I(s)=\int_{\infty}^{\delta}\frac{(-x)^{s-1}}{e^{x}-1}dx+\int_{\Omega}\frac{(-z)^{s-1}}{e^{z}-1}dz+\int_{\delta}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}}{e^{x}-1}dx \tag{15}$$

黎曼的原文没有对（15）式做具体计算，而是直接给出以下结果：

$$I(s)=(e^{i\pi s}-e^{-i\pi s})\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^{x}-1}dx \tag{16}$$

可知黎曼的计算实际上令（15）式右边的中间项等于零，即：

$$\int_{\Omega}\frac{(-z)^{s-1}}{e^{z}-1}dz=0 \tag{17}$$

利用欧拉公式：

$$\frac{e^{i\pi s}-e^{-i\pi s}}{2i}=\sin\pi s \tag{18}$$

将（18）和（16）代入（13）式，得到：

$$I(s)=i2\sin\pi s\Gamma(s)\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right) \tag{19}$$

再利用关系：

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s} \qquad 0<\mathrm{Re}(s)<1 \tag{20}$$

以及（14）式，从（19）式得到黎曼 Zeta 函数的积分形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\frac{I(s)}{i2\sin(\pi s)\Gamma(s)}=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{L}\frac{(-z)^{s-1}}{e^{z}-1}dz \tag{21}$$

利用定义（1）式，（21）式一般被写为：

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz \tag{22}$$

然而我们应当记住，（22）式左边的$\zeta(s)$是用（1）式定义的，其本意是（21）式。这在以下讨论 Zeta 函数方程的一致性问题时是非常重要的。

2.2 黎曼 Zeta 函数方程的推导

为了计算（22）式的右边，黎曼考虑图 2 的围道，并利用了留数定理。留数定理是：设C为分段光滑的闭合曲线，函数$f(z)$在C内除去有限孤立奇点外是单值解析的，且在C上也没有奇点。设$a_{-1}^{(k)}$为$f(z)$的第k个奇点的留数，则有关系【10】：

$$\oint_C f(z)dz=i2\pi\sum_{k=1}^{N}a_{-1}^{(k)} \tag{23}$$

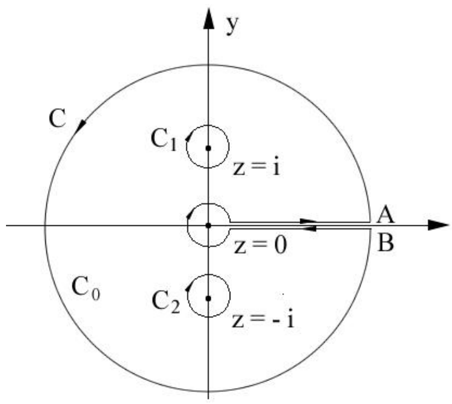

图 2. 黎曼 Zeta 函数的留数积分

按照留数定理，图 1 的积分线路被改为图 2 的在复平面上的积分围道。C的半径趋于无穷大时，沿大圆C_0的积分为零。按照柯西定理，就可以将图 1 的积分用图 2 中绕$z=\pm in\pi$奇点的留数之和来表示。被积函数在$z=\pm i2n\pi$处有无穷多个极点（$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$），图 2 画出其中的三个。在奇点的邻域将$f(z)$展成罗朗级数，通过积分得到留数。

对黎曼 Zeta 函数，留数计算公式如下【1】【2】【3】：

$$a_{-1}^{(k)}=\left[\frac{(-z)^{s-1}}{(e^z-1)'}\right]_{z=\pm i2n\pi}=\left[\frac{(-z)^{s-1}}{e^z}\right]_{z=\pm i2n\pi}=(\pm i2n\pi)^{s-1} \tag{24}$$

上式对$z=0$的坐标原点不适用。考虑到：

$$(i)^{s-1}+(-i)^{s-1}=\frac{1}{i}\left(e^{i\pi s/2}-e^{-i\pi s/2}\right)=2\sin\frac{\pi s}{2} \tag{25}$$

按照留数定理，得：

$$\sum_{k=1}^{N}a_{-1}^{(k)}=\frac{1}{i2\pi}\oint_C\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(i2\pi n)^{s-1}+(-i2\pi n)^{s-1}\right]$$

$$=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(1-s)} \tag{26}$$

将（26）式代入（21）式，就得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(1-s)} \tag{27}$$

考虑（1）式的定义，就有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(1-s)}=\zeta(1-s) \tag{28}$$

$$\zeta(s)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s) \tag{29}$$

（29）就是黎曼 Zeta 函数方程，又被称为黎曼 Zeta 函数代数关系式，它在$\zeta(s)$与$\zeta(1-s)$间建立关系。在（29）式的基础上，黎曼提出 Zeta 函数的零点在$s=1/2+ib$的直线上的猜想。

目前一般认为，经过黎曼的复延拓，（29）式右边变成是 Zeta 函数的新定义，因此（29）式的左边的$\zeta(s)$就不再是（1）式的形式。

然而实际情况不是这样，从（27）式得到（29）式时，最后必须用到（1）式和（28）式。因此必须记住，（29）式的原型是（27）式，它只是（27）式的符号简化表示方式。我们以下在（27）式的基础上讨论黎曼 Zeta 函数方程的一致性问题。

三 黎曼$\zeta(s)$函数方程在复平面实轴上不成立的证明

按照复变函数理论，复延拓是将原来定义在实数域的函数$f(x)$扩展到复数域，即令$f(x)\to G(z)=G(x+iy)$。扩展后的复函数虽然超出原先函数的定义范围，但在实数域内必须与原来的函数一致，在$y=0$时应当有$G(x)=f(x)$，否则就不是原函数的复延拓。

按照这种定义，在复平面$b=0$和$a\neq 1$的实轴上，Zeta 函数方程（27）式也应当成立。由于在黎曼的推导过程中 Zeta 函数的定义是非常明确的，$\zeta(s)$和$\zeta(1-s)$由（1）和（28）式描述。在复平面的实轴上，（27）式就变成：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-a}=2(2\pi)^{a-1}\Gamma(1-a)\sin\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{a-1} \tag{30}$$

我们以下证明，（30）式的两边是自相矛盾的。

I) 对于a是整数的情况，取$a=-2$，（30）式的左边是无穷大：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}=1+2^2+3^2+4^2+\cdots\to\infty \tag{31}$$

右边则等于零：

$$2(2\pi)^{-3}\Gamma(3)\sin(-\pi)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3}=0\times\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)=0 \tag{32}$$

如果取$a=4$，（30）式的左边是一个有限的确定值：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots > 1 \tag{33}$$

右边则是不确定的：

$$2(2\pi)^3\Gamma(-3)\sin(2\pi)\sum_{n=1}^{\infty} n^3 = 0 \times \left(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots\right) = 0 \times \infty \tag{34}$$

因此对于 a 是整数的情况，（30）式两边是明显地矛盾的。

II) 对于 a 是非整数的情况，取 $a = 1/2$，即黎曼猜想的非平凡零点值，（30）式左边为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \to \infty \tag{35}$$

考虑到 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ， $\sin\pi/4 = \sqrt{2}/2$，（30）式右边则为：

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1/2)\sin\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} = 1 \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots\right) \to \infty \tag{36}$$

因此（30）式两边完全相等，没有矛盾。但结果是无穷大，而不是零。

III) 如果 $a > 1$ 且是非整数，比如取 $a = 3.5$，（30）式左边是一个收敛的级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} = 1 + \frac{1}{2^{3.5}} + \frac{1}{3^{3.5}} + \frac{1}{4^{3.5}} + \cdots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{37}$$

根据 Gama 函数负延拓公式，有 $\Gamma(-2.5) = -8\sqrt{\pi}/15$ ，以及 $\sin 3.5\pi/2 = -0.7091$，可知（30）式的右边是发散的，有：

$$2(2\pi)^{a-1}\Gamma(1-a)\sin\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{a-1} = 2(2\pi)^{2.5}\Gamma(-2.5)\sin\frac{3.5\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2.5}$$

$$= (2\pi)^{2.5}\sqrt{\pi} \times 0.7564 \times \left(1 + 2^{2.5} + 3^{2.5} + 4^{2.5} + \cdots\right) \to \infty \tag{38}$$

因此（30）式的等号两边是不相容的。

IV) 如果 $a < 0$ 且是非整数，比如取 $a = -3.5$，情况则相反。（30）式左边发散，有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} = 1 + 2^{3.5} + 3^{3.5} + 4^{3.5} + \cdots \to \infty \tag{39}$$

考虑到 $\Gamma(4.5) = 105\sqrt{\pi}/16$， $\sin(-3.5\pi/2) = 0.7091$，（30）式的右边却是收敛的，有：

$$2(2\pi)^{a-1}\Gamma(1-a)\sin\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{a-1} = 2(2\pi)^{-4.5}\Gamma(4.5)\sin\left(\frac{-3.5\pi}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4.5}$$

$$= (2\pi)^{-4.5}\sqrt{\pi} \times 9.3069 \times \left(1 + \frac{1}{2^{4.5}} + \frac{1}{3^{4.5}} + \frac{1}{4^{4.5}} + \cdots\right) \tag{40}$$

V) 如果 $0 < a < 1$，比如取 $a = 0.2$，（30）式左边是发散的，有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} = 1 + \frac{1}{2^{0.2}} + \frac{1}{3^{0.2}} + \frac{1}{4^{0.2}} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \to \infty \tag{41}$$

按照 Gama 函数的解析延拓公式，$\Gamma(0.8) = \Gamma(1.8)/0.8 = 1.1643$，$\sin(0.1\pi) = 0.3087$，（30）式的右边也是发散的，有：

$$2(2\pi)^{a-1}\Gamma(1-a)\sin\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^{a-1} = 2(2\pi)^{-0.8}\Gamma(0.8)\sin(0.1\pi) \times \sum_{n=1}^{\infty} n^{-0.8}$$

$$= (2\pi)^{-4.5} \times 0.7188 \times \left(1 + \frac{1}{2^{0.8}} + \frac{1}{3^{0.8}} + \frac{1}{4^{0.8}} + \cdots\right) \to \infty \tag{42}$$

因此（30）式是没有意义的，我们无法认为方程的两边严格相等。

总之，在 a 是非整数且 $|a| > 1$ 的情况下，黎曼 Zeta 函数方程在复平面的实数轴上是不一致的。方程总是一边为无穷大，另外一边为有限值。在 $0 < a < 1$ 的情况下，方程两边都是无穷大，没有意义，无法证明它们严格相等。

只有在 $a = 1/2$ 的点上，方程两边严格相等，这也许就是黎曼猜想认为 $a = 1/2$ 的根本原因。但结果仍然无穷大，而不是零。也就是说 $s = a = 1/2$ 不是黎曼 Zeta 函数方程的零点，而是无穷大点。

四 黎曼 Zeta 函数积分形式中不可忽略的项

4.1 $\mathrm{Re}(s) = a < 1$ 时(17) 式不等于零。

以下证明，在 $\mathrm{Re}(s) = a < 1$ 的情况下，（17）式的积分不但等于零，而且是一个发散值。在绕原点的小圆周 Ω 上 $z = \delta e^{i\theta}$，$dz = i\delta e^{i\theta}d\theta$，$dz/z = id\theta$。由于 $\delta << 1$，按照台劳级数公式，有：

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots - 1} = \frac{1}{z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots}$$

$$= \frac{1}{z(1 + z/2! + z^2/3! + \cdots)} = \frac{1}{z}(1 + k_1 z + k_2 z^2 + \cdots) \tag{43}$$

式中 k_i 是展开式待定系数。将（43）式代入（17）式的左边，得：

$$\int_{\Omega} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_{\Omega} \frac{(-z)^{s-1}}{z}(1 + k_1 z + k_2 z^2 + \cdots)dz \tag{44}$$

先计算右边第一项，有：

$$\int_{\Omega} \frac{(-z)^{s-1}}{z} dz = \int_0^{2\pi} (-\delta e^{i\theta})^{s-1} id\theta = (-\delta)^{s-1}\int_0^{2\pi} e^{i(s-1)\theta} d(i\theta)$$

$$= \frac{(-\delta)^{s-1}}{s-1} e^{i(s-1)\theta}\Big|_0^{2\pi} = \frac{(-\delta)^{s-1}}{s-1}\left(e^{i2\pi s}e^{-i2\pi} - 1\right) = \frac{(-\delta)^{s-1}}{s-1}(e^{i2\pi s} - 1) \tag{45}$$

将 $s = a + ib$ 代入（45）式，利用 $\delta^{ib} = e^{ib\ln\delta}$，$e^{i2\pi s} = e^{-2\pi b}e^{i2\pi a} = e^{-2\pi b}(\cos 2\pi a + i\sin 2\pi a)$，得：

$$\frac{(-\delta)^{s-1}}{s-1}=\frac{(\delta e^{i\pi})^{a-1+ib}}{a-1+ib}=\frac{\delta^{a-1}\delta^{ib}e^{-\pi b}e^{i\pi(a-1)}}{a-1+ib}=\frac{\delta^{a-1}e^{-\pi b}e^{ib\ln\delta}e^{i\pi(a-1)}}{(a-1)^2+b^2}\left(a-1-ib\right)$$

$$=\frac{\delta^{a-1}e^{-\pi b}}{(a-1)^2+b^2}\Big\{(a-1)\cos\big(b\ln\delta+\pi(a-1)\big)+b\sin\big(b\ln\delta+\pi(a-1)\big)$$

$$+i\Big[(a-1)\sin\big(b\ln\delta+\pi(a-1)\big)-b\cos\big(b\ln\delta+\pi(a-1)\big)\Big]\Big\} \qquad (46)$$

$\delta\to 0$ 时，$\ln\delta\to-\infty$，$\sin(b\ln\delta)$ 和 $\cos(b\ln\delta)$ 是不定式。如果 $a>1$，当 $\delta\to 0$ 时 $\delta^{a-1}\to 0$，（46）式收敛。如果 $a<1$，则 $\delta\to 0$ 时 $\delta^{a-1}\to\infty$，（46）式发散，（44）式就不等于零。

（44）式右边第二项的计算结果是：

$$k_1\int_{\Omega}(-z)^{s-1}dz=k_1\int_0^{2\pi}(-\delta e^{i\theta})^{s-1}\delta de^{i\theta}=k_1(e^{i\pi})^{s-1}\delta^s\int_0^{2\pi}e^{is\theta}d(i\theta)$$

$$=\frac{k_1e^{i\pi(s-1)}\delta^s}{s}e^{is\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{k_1e^{i\pi(s-1)}\delta^{a+ib}}{a^2+b^2}(e^{i2\pi s}-1)(a-ib)\sim k_1'\delta^a \qquad (47)$$

如果 $a>0$，当 $\delta\to 0$ 时 $\delta^a\to 0$，（47）式收敛。如果 $a<0$，$\delta\to 0$ 时 $\delta^a\to\infty$，（47）式发散。

因此，（44）式积分的最后结果应当是：

$$\int_{\Omega}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz=Q(\delta) \qquad (48)$$

如果 $a<1$，$\delta\to 0$ 时 $Q(\delta)\to\infty$。可见与级数求和形式一样，Zeta 函数的积分形式在 $\mathrm{Re}(s)=a<1$ 时仍然是发散的。因此在 $a=1/2<1$ 时，讨论黎曼 Zeta 函数的零点是没有意义的。

在现有的一些文献中，对 $a>1$ 的情况也做了近似计算，都认为（17）式等于零，可以忽略。但对 $a<1$ 的情况，就没有做更深入的计算。事实上，如果那些文章的作者对 $a<1$ 的情况也做深入的计算，就会得出与本文相同的结论【2】【11】。

4.2 发散项的数值计算

为了对（48）式发散问题有更清楚的了解，我们来做具体的数值计算。由于（15）式的中间项不可忽略，就有：

$$I(s)=\int_{\infty}^{\delta}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx+\int_{\Omega}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz+\int_{\delta}^{\infty}\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}dx$$

$$=(e^{i\pi s}-e^{-i\pi s})\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx+Q(\delta)$$

$$=2i\sin(\pi s)\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx+Q(\delta) \qquad (49)$$

按照（14）和（49）式，得：

$$\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\left[\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz-Q(\delta)\right] \tag{50}$$

如果$\delta\neq 0$,就有：

$$\zeta(s)\Gamma(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\neq\int_{\delta\neq 0}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\left[\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz-Q(\delta\neq 0)\right] \tag{51}$$

另一方面，在复平面的实轴上$b=0$，作为近似估计，按照（46）式，有：

$$Q(\delta)\approx\frac{\delta^{a-1}}{a-1}\cos\bigl(\pi(a-1)\bigr) \tag{52}$$

如果$a>1$，当$\delta\to 0$，我们有$Q(\delta)\to 0$，就得到黎曼原始论文的结果：

$$\zeta(s)\Gamma(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz \tag{53}$$

如果$a<1$, 例如取$a=3/4$, 按（52）式，得：

$$Q(\delta)\approx-\frac{\delta^{-1/4}}{1/4}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{\delta^{1/4}} \tag{54}$$

若$\delta\neq 0$, 取$\delta=10^{-4}$, 有$Q(\delta)=-2\sqrt{2}\times 10$, (50) 式变成

$$\int_{10^{-4}}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\left[\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz+2\sqrt{2}\times 10\right] \tag{55}$$

(55) 式就有一个附加项$2\sqrt{2}\times 10$。 令$\delta=10^{-40}$, 我们有$Q(\delta)\approx-2\sqrt{2}\times 10^{10}$,（50）式变成：

$$\int_{10^{-40}}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\left[\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz+2\sqrt{2}\times 10^{10}\right] \tag{56}$$

附加项具有10^{10}的数量级。事实上，对于$\mathrm{Re}(s)<1$，只要令δ足够小，就可以使$\left|-Q(\delta)\right|$足够大，以至于：

$$\left|-Q(\delta)\right|>>\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz \tag{57}$$

因此我们有：

$$\zeta(s)\Gamma(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\neq\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz \tag{58}$$

如果取$\delta\to 0$， $\mathrm{Re}(s)<1$，则有$Q(\delta)\to\infty$，即：

$$\zeta(s)\Gamma(s)=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2i\sin(\pi s)}\left[\int_L\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz+\infty\right] \tag{59}$$

在这种情况下，黎曼 Zeta 函数积分形式没有改变其级数形式的发散性，实际上仍然没有意义。

4.3 级数求和公式的适用条件

以下讨论导致 Zeta 函数方程不一致性和$\mathrm{Re}(s)<1$时 Zeta 函数积分形式无穷大的原因。按照$\Gamma(s)$函数的定义，当$\mathrm{Re}(s)>0$时（9）式的积分在下限$x=0$处是有限的。黎曼在推导（13）式时使用了（12）式。需要注意的是，（12）成立的条件是$0<x\le\infty$，这在一般的数学手册中都可以查到（令$x'=e^{-x}$，$|x'|>1$）【9】。在$x=0$的点（12）式两边都变成无穷大，是没有意义的，我们有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots=\frac{1}{e^{x}-1}\to\infty \qquad x=0$$

$$\sim 1+1+1+1+\cdots=\frac{1}{0}\to\infty \tag{60}$$

此时按照（12）式，还会得到互相矛盾的结果。比如$0<x\le\infty$时，我们有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots+1000>\frac{1}{e^{x}-1} \tag{61}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+\cdots-1000<\frac{1}{e^{x}-1} \tag{62}$$

如果令$x=0$，（61）和（62）式就变成：

$$\infty+1000=\infty>\infty \qquad \text{和} \qquad \infty-1000=\infty<\infty \tag{63}$$

这样的结果显然是荒谬的，因此$x=0$时（9）式不能用，（13）式不成立。在黎曼的原始论文中，求和公式（9）和适用条件$0<x\le\infty$没有被提及。

事实上，除了（9）式在$x=0$时不能用外，我们找不到在（59）式右边引起无穷大的原因。也正是由于采用了（9）式，通过复变函数的围道积分，变成对被积函数在$z=\pm i2n\pi$处奇点的留数求和，最后变成求和形式$\zeta(1-s)$，导致与方程左边的$\zeta(s)$互相矛盾的结果。

五 雅可比公式的适用条件

关于 Zeta 函数方程在替换$s\to 1-s$下不变的问题，黎曼原文的证明写得比较简略，以下给出详细推导过程。并证明由于不正确地使用了雅可比公式，这个不变性实际上不存在。与（9）式有所不同，黎曼采用以下 Gama 函数做计算【1】【2】【3】：

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s/2-1}dx \tag{64}$$

在上式中令$x\to n^2\pi x$，得：

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-n^2\pi x}n^{s}\pi^{s/2}x^{s/2-1}dx \tag{65}$$

或：

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^{\infty}x^{s/2-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}\right)dx \tag{66}$$

令： $$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x} \tag{67}$$

利用 Zeta 函数的定义，将（66）式写成：

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{\mathrm{s}}{2}\right)=\int_0^{\infty}x^{s/2-1}\psi(x)dx$$

$$=\int_0^1 x^{s/2-1}\psi(x)dx+\int_1^{\infty}x^{s/2-1}\psi(x)dx \tag{68}$$

为了计算（68）式，黎曼引入雅可比函数【8】：

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi x}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}=1+2\psi(x) \tag{69}$$

并利用了雅可比函数的性质【8】【12】：

$$\theta(x)=\sqrt{x}\theta\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x>0 \tag{70}$$

将（69）式写成：

$$1+2\psi(x)=\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[1+2\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right] \tag{71}$$

得： $$\psi(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right]-1\right\} \tag{72}$$

利用（72）式，就有【1】【12】：

$$\int_0^1 x^{s/2-1}\psi(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{s/2-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right]-1\right\}dx$$

$$=\int_0^1 x^{s/2-3/2}\psi\left(\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{-s/2-3/2}-x^{s/2-1}\right)dx \tag{73}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^{s/2-3/2}-x^{s/2-1}\right)dx=\frac{1}{s(s-1)} \tag{74}$$

令 $x=1/y$，有：

$$\int_0^1 x^{s/2-3/2}\psi\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\infty}^1 y^{-s/2+3/2}\psi(y)(-y^{-2})dy=\int_1^{\infty}y^{-(s+1)/2}\psi(y)dy \tag{75}$$

在（75）式右边令 $y\to x$，并考虑（74）式，（73）式就变成：

$$\int_0^1 x^{s/2-1}\psi(x)dx=\int_1^{\infty}x^{-(s+1)/2}\psi(x)dx+\frac{1}{s(s-1)} \tag{76}$$

于是就可以将（68）式写成：

$$\zeta(s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_{1}^{\infty}\psi(x)\left(x^{-(s+1)/2}+x^{s/2-1}\right)dx+\frac{1}{s(s-1)} \tag{77}$$

（77）式的右边在 $s \to 1-s$ 的替换下是不变的，因此左边在替换下也应当是不变的。令【13】【14】：

$$\Phi(s)=\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{78}$$

就意味着存在对称性：

$$\Phi(s)=\Phi(1-s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{79}$$

从（78）和（79）式可得：

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{80}$$

利用 Gama 函数互补公式：

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin(s\pi/2)} \tag{81}$$

可以将（80）式写成：

$$\zeta(s)=\pi^{s-3/2}\sin\frac{s\pi}{2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{82}$$

另一方面，黎曼根据（9）式得到（13）式。将（13）式延拓到复数平面，用留数定理计算，导出的 Zeta 函数的函数方程（5）式。如果两种计算方法是一致的，（82）和（5）式应当相等，就有：

$$\pi^{s-3/2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)=2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s) \tag{83}$$

或：

$$\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)=2^{s}\pi^{1/2}\Gamma(1-s) \tag{84}$$

根据 Gama 函数的 Legendre 加倍公式：

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(s)=2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s) \tag{85}$$

在（85）式中令 $s \to (1-s)/2$，就得到（84）式，由此证明（83）式成立，表示两种计算方法的结果一样。但如果考虑 $\mathrm{Re}(s)<1$ 时（5）式存在一个被忽略无穷大的项，两种计算方法就是不一致的。

以上推导存在一个严重的问题，即雅可比函数公式（70）的适用条件是 $x>0$。如果 $x=0$，$1/x \to \infty$，（70）式是没有意义的。由于（73）和（74）式中积分下限是 $x=0$，因此（77）式不成立，Zeta 函数的对称关系（79）式不存在。如果不用雅可比函数公式，按照（9）计算，我们不可能得到（77）和（78）式，也不可能得到（79）式的对称关系。

六 Zeta 函数零点计算问题的讨论

通过人工计算和采用计算机技术，至今找到黎曼 Zeta 函数大量的非平凡零点。据称已经达到十万亿个，它们都分布都在 $s=1/2+ib$ 的直线上【15】【16】。然而，它们实际上都不是严格的 Zeta 函数真正的零点。以下讨论这个问题。

1. 对于一般的复变函数 $f(z)=f(x+iy)$，总可以将实部与虚部分开，写成如下形式：

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{86}$$

$f(z)=0$ 意味着 $u(x,y)=0$ 和 $v(x,y)=0$。如果 $f(z)$ 是解析函数，则要求 $f(z)$ 处处可导。或者说除了要求函数及其导数连续外，还要求 $f(z)$ 对 x 的偏导数与对 y 的偏导数一样。结果导致 $f(z)$ 的虚部与实部不是相互独立的，二者必须满足以下柯西-黎曼方程【10】：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{87}$$

由于黎曼 Zeta 函数被认为是解析函数，（7）式也可以写成：

$$\xi(s)=u(a,b)+iv(a,b) \tag{88}$$

$u(a,b)$ 和 $v(a,b)$ 需要满足（87）式，$\xi(s)=0$ 意味着 $u(a,b)$ 和 $v(a,b)$ 同时等于零。然而在黎曼 Zeta 函数的零点计算中，实际上没有严格地将函数写成（86）式的形式，然后同时计算 $u(a,b)$ 和 $v(a,b)$ 的零点。计算采用的都是近似方法，这种方法使 Zeta 函数原来具有的，满足柯西-黎曼方程的对称性被破坏。

2. 比如取 $s=1/2+ib$，将（7）式改写成以下形式【15】【17】：

$$\xi(1/2+ib)=\left[e^{\mathrm{Re}\ln\Gamma(s/2)}\pi^{-1/4}\frac{-b^2-1/4}{2}\right]\left[e^{i\,\mathrm{Im}\ln\ln\Gamma(s/2)}\pi^{-ib/4}\zeta(1/2+ib)\right] \tag{89}$$

计算机实际计算的是 Zeta 函数在零点附近符号的改变。如果 Zeta 函数从正好变成负号，或者从负号变成正号，就认为出现一个零点。上式第一个括号内的项总是负的，零点计算只需考虑第二项，令：

$$Z(b)=e^{i\,\mathrm{Im}\ln\ln\Gamma(s/2)}\pi^{-ib/4}\zeta(1/2+ib) \tag{90}$$

将 $\mathrm{Z}(b)$ 级数展开成渐进形式，得到黎曼-西格尔公式：

$$\mathrm{Z}(b)=2\sum_{n<\sqrt{t/2\pi}}n^{-1/2}\cos\bigl(\theta(b)-b\ln n\bigr)+R(b) \tag{91}$$

黎曼函数的零点计算采用的是（91）式，其中的 $\theta(b)$ 和 $R(b)$ 是非常复杂的函数。然后计算不同阶的 $\mathrm{Z}(b)$ 的零点，比如第一项取 $\mathrm{Z}(b)=2\cos\theta(b)$，得到第一个零点 $b\approx 14.5$，再考虑 $\mathrm{R}(b)$，将它修正成 $b\approx 14.1345$，如此等等。

显然按照（91）式，Zeta 函数已经从复函数变成实函数。$\mathrm{Z}(b)$ 即不是 Zeta 函数的实部，也不是它的虚部。对级数的任意单项而言，柯西-黎曼方程的限制（87）式不存在，或者说函数的解析性被破坏。（91）式是一个包含三角函数的单变量无穷阶级数，它不但有零点，还可以有无穷多的 b 满足 $\mathrm{Z}(b)=0$，但它们都不是（7）式真正的零点。

3. 目前所有关于黎曼函数零点的计算机计算，都是事先假定 $\mathrm{Re}(s)=1/2$。由于前提已经假定

$\mathrm{Re}(s)=1/2$，我们就不能说计算机证明 $\mathrm{Re}(s)=1/2$，只能说明在直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上存在零点。

4. 事实上，按照（1）和（28）式，$\zeta(s)$ 和 $\zeta(1-s)$ 已经是级数展开形式。我们直接讨论它们的零点就可以了，根本没有必要将它再展开成级数（91）式的形式。黎曼-西格尔公式除了引起误差，还把问题复杂化，实际上是没有必要的。

七 结论

黎曼猜想是希尔伯特在 2000 年世界数学大会上提出的二十三个数学难题之一，它在二十世纪没有被解决。进入二十一世纪后，美国克莱因数学研究所将它选为千禧年的八个数学难题之一。黎曼猜想问题之所以如此著名，还因为它已经成为现代素数分布理论的基础。由于黎曼的工作，传统的素数分布理论的研究从实数域被延拓到复数域。据统计至今为止，在假定黎曼猜想正确的前提下，数学家们已经证明了近千条定理，可见它对现代数学的影响之深。

由于黎曼猜想长期无法得到证明，就使有些数学家相信它是不成立的。但大多数数学家仍然相信它是成立的，也希望它能成立。然而本文给出了第三种结果，证明黎曼猜想没有意义，这是出乎大多数人的意料的。

问题在于黎曼 1859 年的原始论文有错，黎曼得到的 Zeta 函数的积分形式和函数方程本身有问题。黎曼不适当地采用了两个公式，忽略了它的适用条件，导致黎曼 Zeta 函数方程的不一致性。黎曼在推导 Zeta 函数积分形式时，还遗漏了一个绕坐标原点的积分项。该项在 $\mathrm{Re}(s)<1$ 时导致无穷大，因此 Zeta 函数的积分形式没有改变其级数求和形式的收敛性。

由于黎曼 Zeta 函数的积分形式、函数方程和对称关系 $\xi(s)=\xi(1-s)$ 都是不成立的，建立在 Zeta 函数方程基础上的黎曼猜想没有意义。数学家们就应当考虑，在黎曼 Zeta 函数基础上研究素数分布是否有意义的问题。或者说应当考虑素数分布理论是否应当回归传统，回到实数域进行研究的问题。

参考文献

【1】Riemann G. F. B., (1859), Uber die Anzabl der Primahlem unter einer gegebenen Grosse, Monatsberichte der Berliner Akademine, 2, 671- 680.

【2】Bent E. Petersen, Riemann Zeta Function, https://pan.baidu.com/s/1geQsZxL.

【3】谢国芳，黎曼提出黎曼猜想的原始论文的译注，https://wenku.baidu.com/view/8029b653be23482fb4da4cff.html.

【4】Neukirch, J. (1999). Algebraic Number Theory. Springer, Berlin, Heidelberg (The original German edition was published in 1992 under the title Algebraische Zahlentheorie).

【5】Iwaniec. H. (2014). Lectures on the Riemann Zeta Function, American Mathematical Society, Providence.

【6】Bender, C. M., Brody, D. C., M¨uller, M. P. (2017). Hamiltonian for the zeros of the riemann zeta function. Physical Review Letters, 118(13), 130201.

【7】Lagarias, J. C. (2002). An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis. The American Mathematical Monthly, 109(5), 534–543.

【8】Jacobi, C. G. J. (1829). Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum, Regiomonti, Borntraeger, Konigsberg (Reprinted by Cambridge University Press, 2012).

【9】数学手册，中国矿业学院数学教研室，科学出版社，1980，p. 144.

【10】郭敦仁，数学物理方法，人民教育出版社，1965，p. 109.
【11】 Felix Rubin, Riemann's First Proof of the Analytic Continuation of $\zeta(s)$ and $L(s,\chi)$, http://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/ws0607/modular-forms/Riemanns_first_proof.pdf.
【12】 Gerald Tenenbaum, Michel Mendes France, Les Nombres, Premiers, Presses Universitaires de France, 1997, 44-52.
【13】Gelbart, S., Miller, S. (2004). Riemann's zeta function and beyond. Bulletin of the American Mathematical Society, 41(1), 59–112.
【14】 Jessen, B., Wintner, A. (1935). Distribution functions and the Riemann zeta function. Transactions of the American Mathematical Society, 38(1), 48–88.
【15】卢昌海，黎曼猜想漫谈，清华大学出版社，2016，p. 61, 52, 192.
【16】 Gourdon X., The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height, 2004, http://pdfs.semanticscholar.org/6eff/62ff5d98e8ad2ad8757c0faf4bac87546f27.pdf.
【17】Katz N M, Sarnak P. Zeroes of zeta functions and symmetry[J].AMS，1999，36(1)1-26.