

Éléments de Géodésie en Mauritanie et Initiation au GPS

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Ingénieur Géographe Général
abenhadjsale@gmail.com

Juillet 2024

Abstract: In this paper, we give in the part I some elements of geodesy and the geodetic systems used in Mauritania. The part II contains an introduction to GPS.

Plan du Cours

Partie I: Éléments de Géodésie

- I.1. Définitions
- I.2. Détermination des points géodésiques
- I.3. Exemple du Système Géodésique Terrestre de Kediat –El-Jil
- I.4. Éléments Historiques de la Géodésie en Mauritanie

Partie II: Initiation au GPS

- II.2. Éléments Généraux du GPS
- II.3. Les Différentes Méthodes d'Observations
- II.4. Le Système Géodésique Universel WGS84
- II.5. Le Modèle de Bursa-Wolf de Passage des Coordonnées Tridimensionnelles $(X,Y,Z)_L$ aux coordonnées $(X,Y,Z)_{GPS}$

Partie I. Éléments de Géodésie

I.1. Définitions

Le grand géodésien Allemand F.R. Helmert (1880) définissait la Géodésie comme suit " ***la Géodésie est la science de la mesure et de la représentation de la surface terrestre***".

Une définition contemporaine de la Géodésie est donnée par le Comité Associé Canadien de Géodésie et de Géophysique (1973) à savoir :

- la Géodésie est la discipline qui concerne la mesure et la représentation de la Terre, incluant son champ de gravité, dans un espace tridimensionnel variant avec le temps.

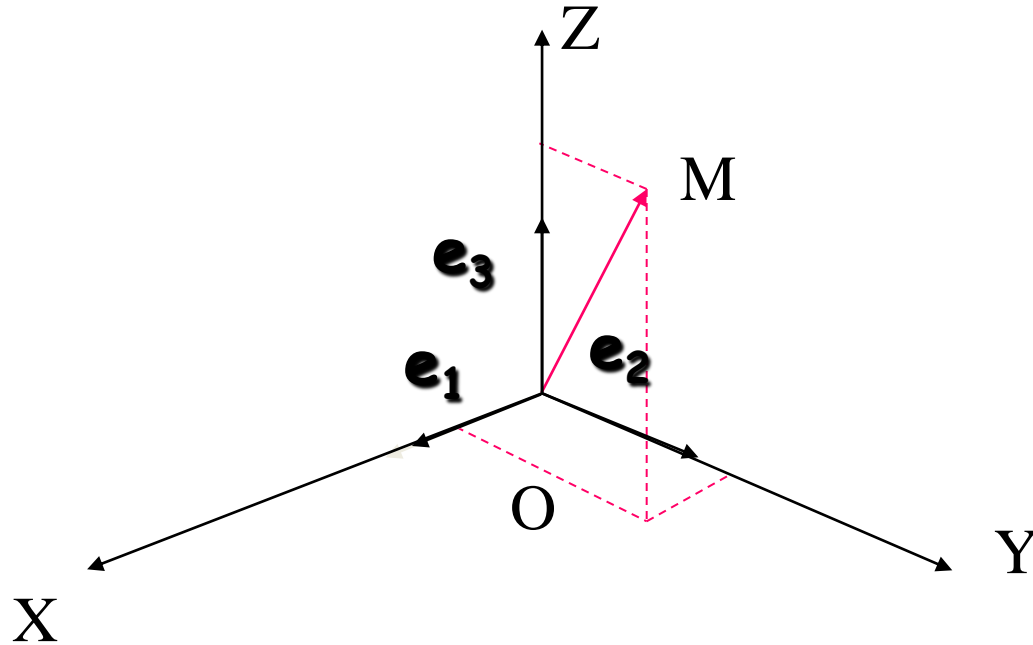
L'aspect pratique de la géodésie:

- L'établissement et la maintenance des réseaux géodésiques tridimensionnels nationaux et globaux, constitués de points matérialisés et de coordonnées connues.

Ces points vont servir comme points de base aux divers travaux topographiques et cartographiques.

Les coordonnées des points se réfèrent par rapport à un référentiel ou système géodésique donné.

- Le système le plus utilisé est le système cartésien formé par un repère cartésien (OX,OY,OZ).

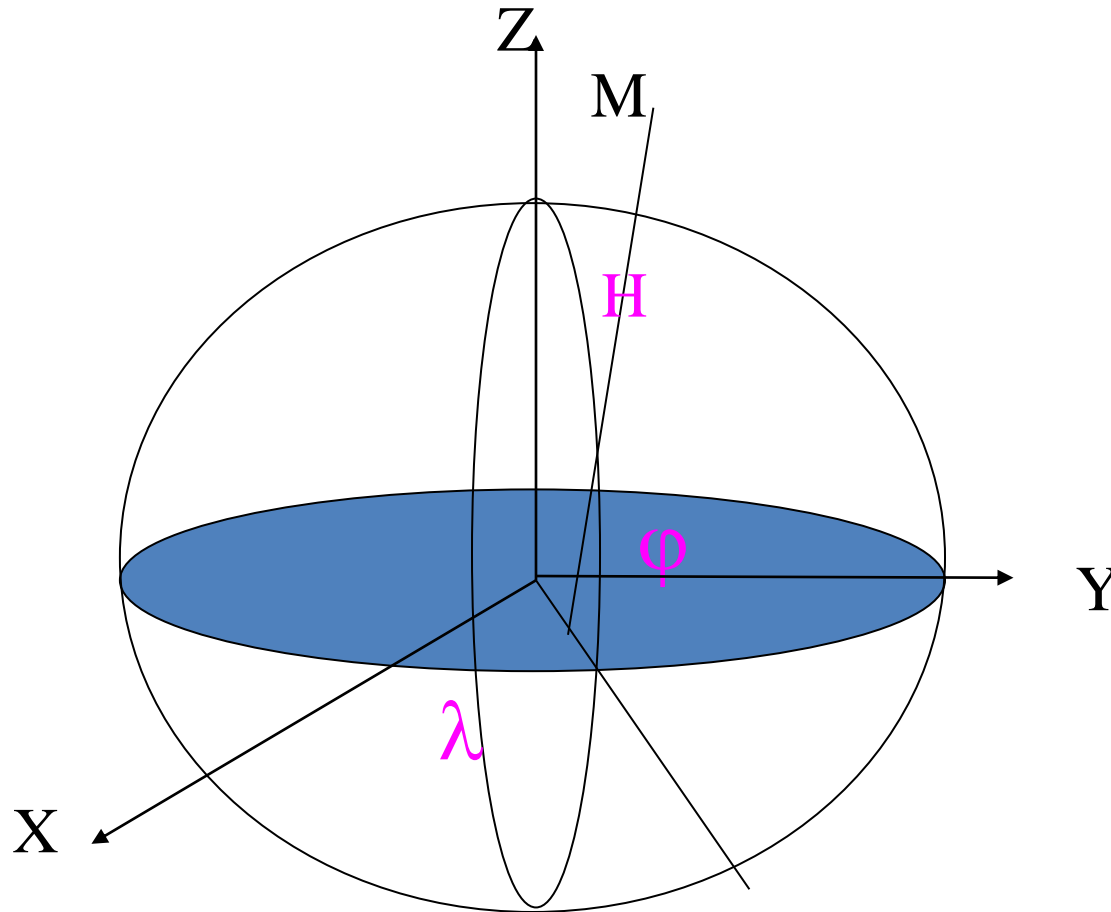


Avec:

- O l'origine du système, presque le centre de la Terre,
- l'axe OZ parallèle à l'axe de la rotation de la Terre,
- le plan OXZ est parallèle au méridien de Greenwich,
- l'axe OY telque OXYZ est un trièdre direct orthonormé,
- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base orthonormée soit :

$$\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1 = \text{l'unité des longueurs} = \text{le mètre.}$$

A ce référentiel est associé un modèle de la Terre soit un ellipsoïde de révolution.



$$\begin{aligned} X &= (N+H)\cos\varphi \cos\lambda \\ Y &= (N+H)\cos\varphi \sin\lambda \\ Z &= (N(1-e^2)+H)\sin\varphi \end{aligned}$$

$$N = a / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

a = demi-grand axe
e = 1ère excentricité

I.2. Détermination des points géodésiques

Par la Géodésie Classique:

- on détermine les coordonnées d'un premier point M dit point fondamental:

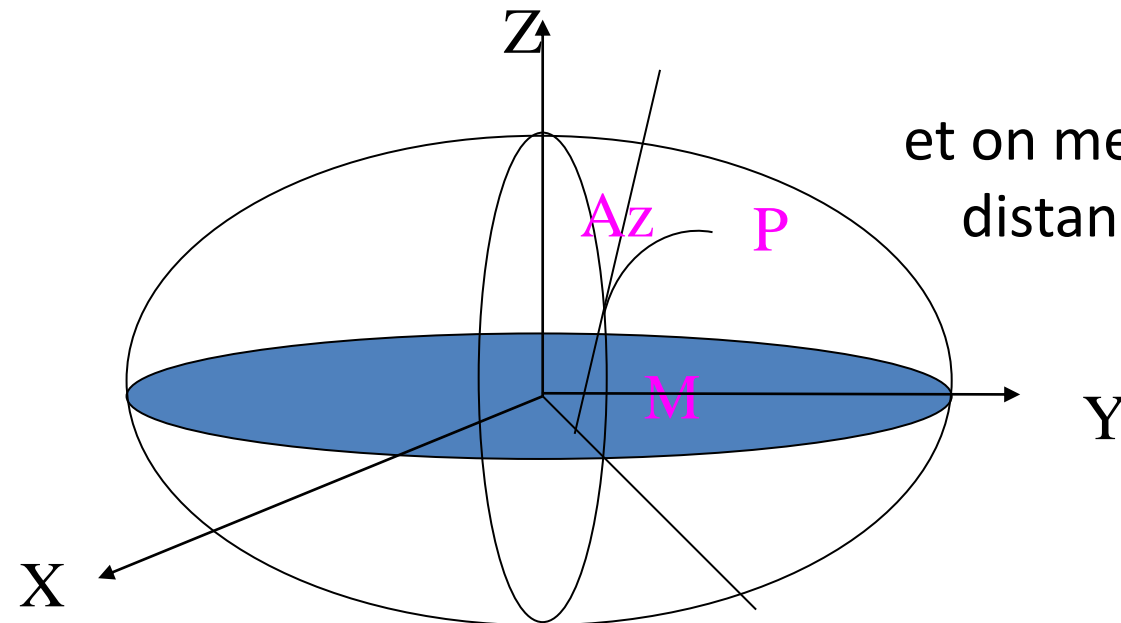
$$\varphi_g = \varphi_{astro}$$

$$\lambda_g = \lambda_{astro}$$

et l'azimut géodésique d'une direction MP:

$$Az_g = Az_{astro}$$

et on mesure la
distance MP

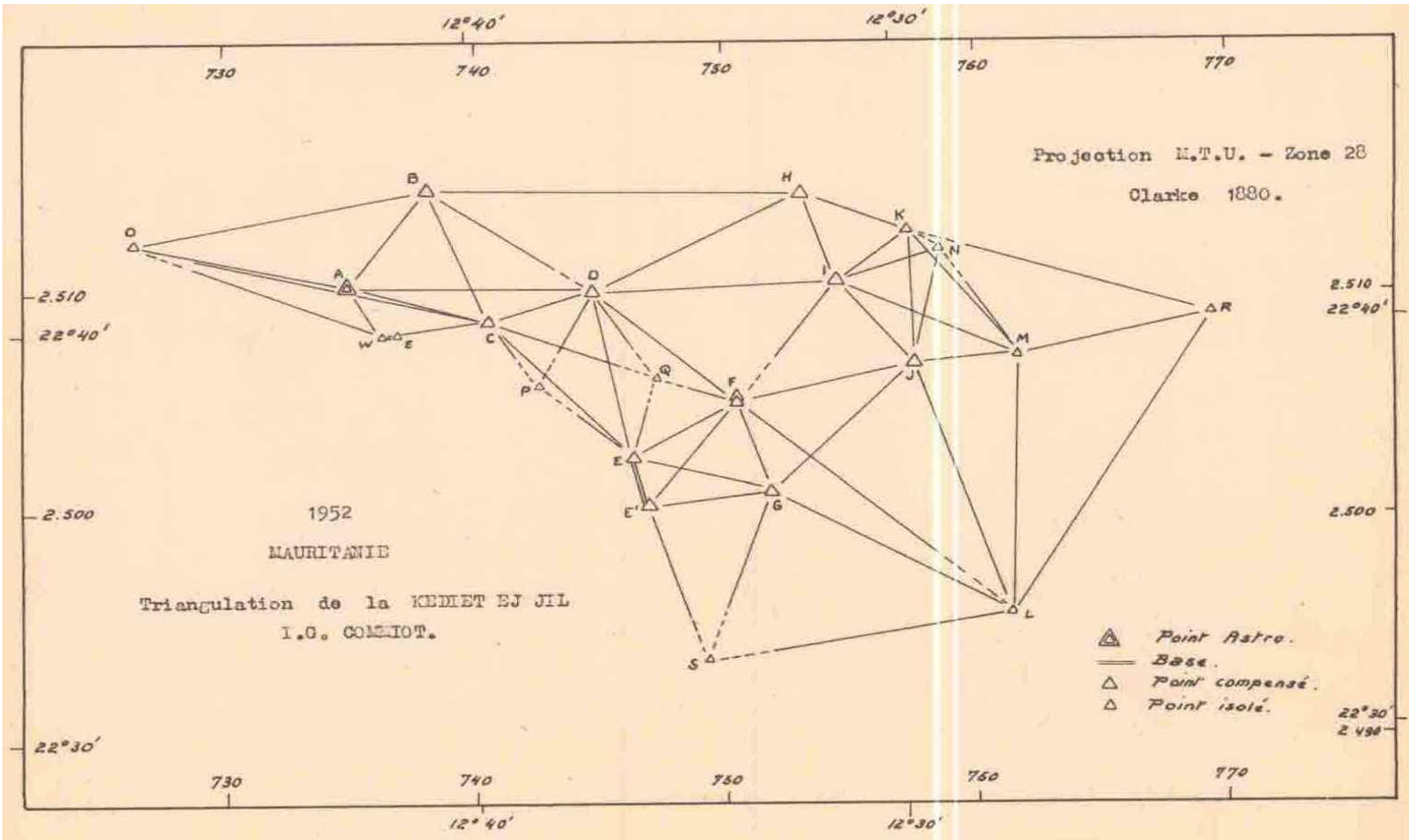


I.3. Exemple: Le Système Géodésique Terrestre de Kediat –El-Jil

En 1952, pour l'exploitation minière du mont Kediet El-Jil à Zouerate, un système géodésique terrestre a été mis en place, défini par (MIFERMA E 103, 1958) :

- Le point fondamental : le point astronomique A de Kediet El-Jil qui avait fourni la latitude astronomique ϕ_a , la longitude astronomique λ_a et l'azimut d'orientation.
- La base EE' de longueur réduite au point de vue de la représentation de valeur 2301.429 m, pour définir l'échelle du système géodésique terrestre.
- L'ellipsoïde de référence c'est l'ellipsoïde de Clarke français 1880 défini par les paramètres : le demi-grand axe $a=6\,378\,249.20$ m et le demi-petit axe $b=6\,356\,515.00$ m.
- La représentation plane choisie pour travailler en coordonnées planes était la représentation conforme UTM (Universel Transverse Mercator) fuseaux 28 et 29 et avec coefficient de réduction $k=0.9996$.

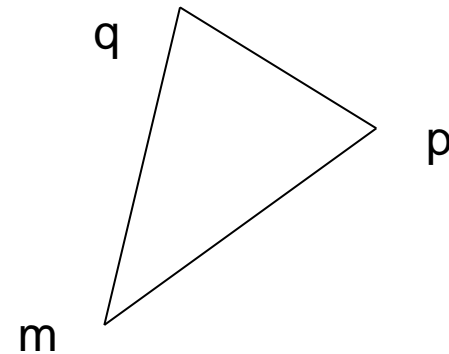
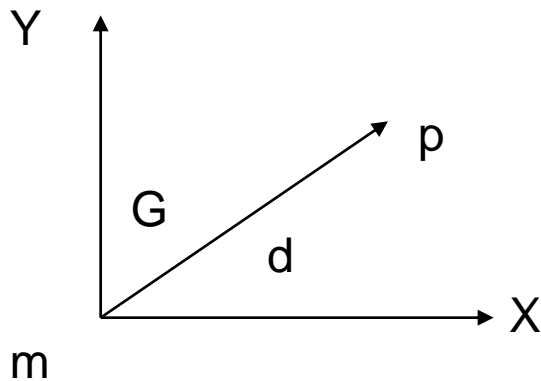
Ce système a été matérialisé par un réseau géodésique terrestre de base constitué de 10 points primaires. Ce système couvre la zone de Zouerate et les alentours.



- En pratique, on travaille sur le plan à l'aide des représentations planes:

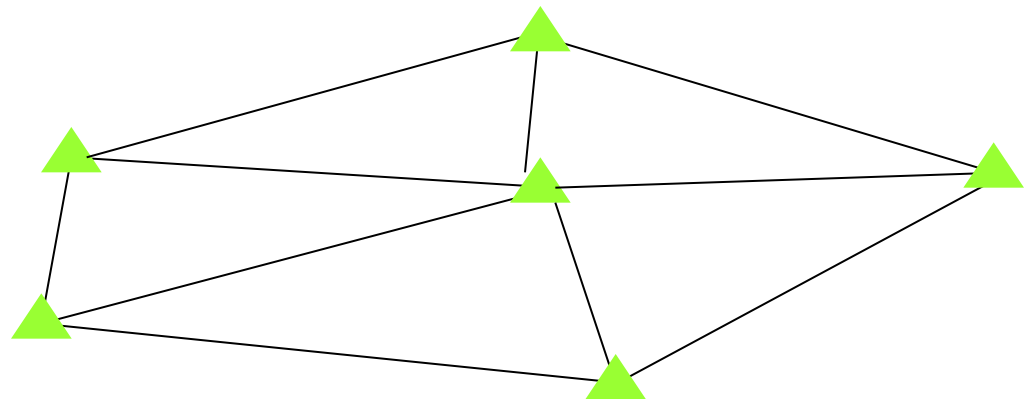
$$(\varphi, \lambda) \implies \mathbf{X} = \mathbf{X}(\varphi, \lambda)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\varphi, \lambda)$$



Ayant les coordonnées de m et p, on peut déterminer les coordonnées d'un troisième point q en mesurant seulement les angles à l'intérieur du triangle mpq.

De proche en proche, on couvre la zone de travail par des triangles: **C'est la méthode de triangulation.**



I.4. Éléments Historiques de la Géodésie en Mauritanie

Les premiers travaux géodésiques en Mauritanie remontaient à 1910 quand le Commandant L.V. Lebail avait établi deux points de signalisation au phare du Cap Blanc.

En 1911, une étude approfondie du Cap Blanc a été réalisée et les points de signalisation originaux des travaux de Lebail en 1910 ont été récupérés et inclus dans le levé. Le système de référence dit Goëland de 1910 a pour point origine le signal Goëland de coordonnées : ($\Phi_0 = 20^\circ 54' 46.72''$ N, $\Lambda_0 = 17^\circ 03' 07.09''$ W), et l'ellipsoïde de référence était l'ellipsoïde de Germain 1865 avec ses paramètres : $a = 6\,377\,397.2$ m, et $1/f = 299.15$ (f désigne l'aplatissement).

Il est à noter que cet ancien système de référence a été révisé par la suite par les français et recalculé sur un ellipsoïde différent en 1961.

En 1935, cinq points du littoral mauritanien ont été observés avec un astrolabe S.O.M. :

- Chauve (monument en ciment) $\Phi = 16^{\circ} 46' 33''$ N, $\Lambda = 16^{\circ} 21' 10''$ W,
- Nouakchott (poste au magasin des Officiers) $\Phi = 18^{\circ} 05' 53''$ N, $\Lambda = 15^{\circ} 57' 23''$ W,
- Angel (monument en ciment) $\Phi = 18^{\circ} 38' 29''$ N, $\Lambda = 16^{\circ} 07' 54''$ W,
- Mahara (tige en bois dans une dune de sable) $\Phi = 19^{\circ} 06' 33''$ N, $\Lambda = 16^{\circ} 17' 06''$ W,
- Timiris (maison dans le village de Memrhar) $\Phi = 19^{\circ} 21' 21''$ N, $\Lambda = 16^{\circ} 31' 08''$ W.

En 1961, la marine française retournait en Mauritanie et effectuait des levés géodésiques de 2ème ordre sur la côte.

Le système de référence Goëland de 1910, avait été recalculé sur l'ellipsoïde de Clarke 1880 (Anglais) où : $a = 6\,378\,249.145$ m, et $1/f = 293.465$ donnant comme suit les coordonnées astronomiques du point origine : ($\Phi'o = 20^\circ 54' 46.7238''$ N, $\Lambda'o = 17^\circ 03' 08.1820''$ W), et ses coordonnées géodésiques sont : ($\phi_o = 20^\circ 54' 43.3490''$ N, $\lambda_o = 17^\circ 03' 06.7295''$ W).

En 1992, les premiers travaux par la géodésie spatiale (des observations par GPS) ont été réalisés dans la capitale Nouakchott.

Partie II. Initiation au GPS

II.1. Introduction

Dans les années 80, C'était le système Doppler (ou Transit) qui était utilisé en géodésie spatiale. Il présentait deux défauts importants :

- une couverture satellitaire insuffisante,
- une faible précision en navigation.

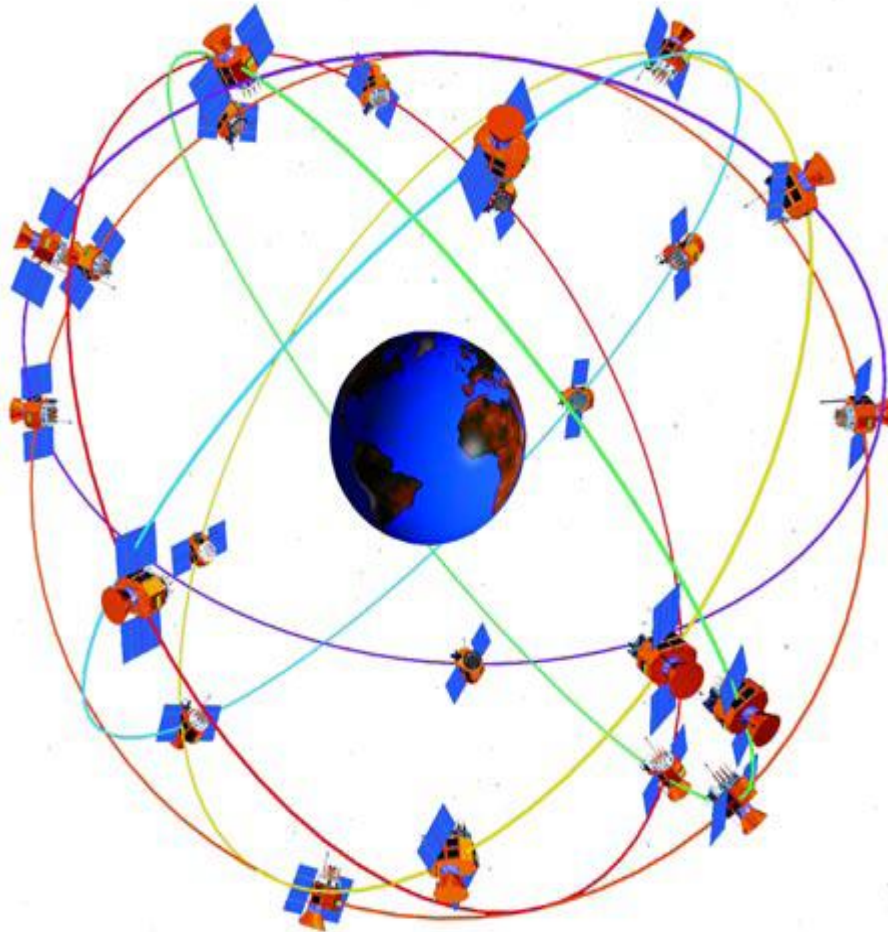
Le Département de la Défense des USA (DoD) a préconisé la mise en place d'un système de navigation plus précis et qui couvre toute la terre globale: c'est le **système de positionnement global** ou **Global Positioning System (GPS)**.

L'objectif de ce système c'est qu'il permet la détermination la position de tout point (sol, mer, air) en tout lieu et à tout instant ainsi que sa vitesse.

Le développement du système GPS a commencé dans les années 70, la mise en place démarrant en 1978 par le lancement du premier satellite. Le système a été déclaré opérationnel par le DoD début février 1994.

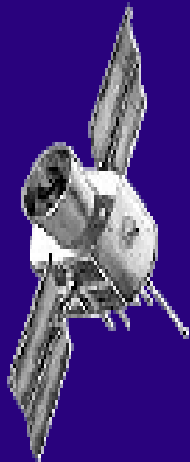
II.2. Les Aspects Généraux du GPS

- Le système complet comporte **30 satellites** répartis de façon à assurer en tout lieu une visibilité simultanée de 4 à 8 satellites avec une élévation d'au moins 15° au dessus de l'horizon.
- Les satellites sont répartis sur 6 plans orbitaux. L'orbite des satellites est quasi-circulaire, leur altitude est d'environ **20 000 km** et leur période d'environ **12 heures**.



La constellation des satellites GPS

Les différentes classes de satellites



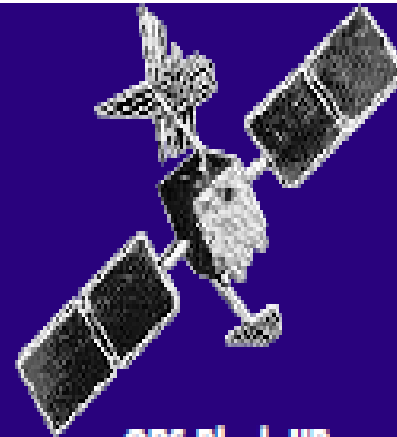
GPS Block I

First launched in 1978



GPS Block II/IIA

First launched in 1989



GPS Block IIR

First launched in 1997



GPS Block IIF

Scheduled to be
launched in late 2005

En 2016, le dernier
lancement du satellite
type Bloc IIF.



Satellite GPS Bloc III: le premier satellite a été lancé en décembre 2018. Le dernier (le sixième) a été mis en orbite en janvier 2023.

Le Message GPS

Les satellites émettent en permanence deux signaux ultra-stables sur les fréquences spécifiques du système L1, L2, L5 et L1C. Sur ces fréquences, est modulé un code particulier dont le décodage fournit le message GPS.

Les Récepteurs GPS

Il existe essentiellement deux types de récepteurs:

- Les récepteurs **mono-fréquences** qui n'enregistrent que les signaux de la fréquence L1.
- Les récepteurs **bi-fréquences** qui enregistrent les signaux des deux fréquences L1 et L2 et L5 et L1C.

Mode	Statique	Statique rapide	Cinématique	En vol
Cas d'emploi	Pour les grandes lignes de base (> 10 km avec récepteur bifréquences).	Bases courtes : < 20 km (bifréquence) < 10 km (monofréquence).	Grand nombre de points à observer dans une zone réduite et dégagée.	Positionnement précis d'objet en mouvements (avions, bateaux, etc.).
Précision : monofréquence bifréquence	5 mm + 1 ppm	5 à 10 mm + 1 ppm 5 à 10 mm + 1 ppm	1 à 2 cm + 1 ppm 1 à 2 cm + 1 ppm	1 à 2 cm + 2 ppm
Temps d'observation	30 mn à 1 heure	2 à 20 mn selon les cas.	Quelques minutes d'initialisation puis quelques secondes sur chaque point.	Temps réel en mouvement.
Applications	Réseaux géodésiques sur de grandes étendues.	Canevas polygonaux. Canevas d'ensemble : remplace la triangulation et la polygonation.	Levers de détails en zone dégagée.	Photogrammétrie, bathymétrie.
Avantages	Précis, plus efficace et plus économique que les méthodes traditionnelles.	Rapide, efficace. Nul besoin de garder le contact avec le satellite.	La plus rapide des méthodes de lever de détails par GPS.	Pas d'initialisation statique.
Inconvénients	Temps d'observation plus long que par les autres méthodes. Réservé aux récepteurs bifréquence.	Limitation en portée.	Une interruption de la réception nécessite une nouvelle initialisation.	Méthode GPS la plus onéreuse.

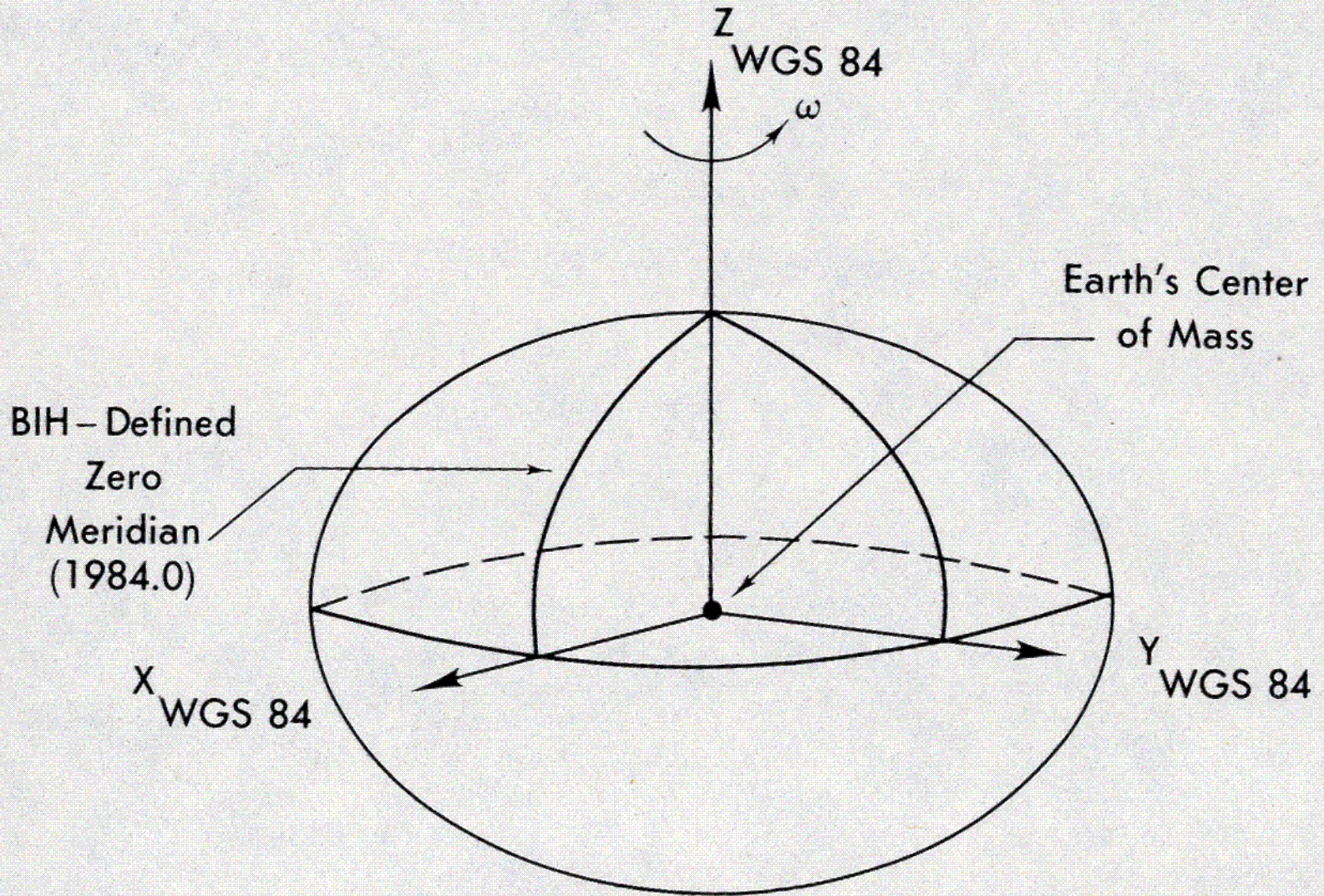
Les Différentes Méthodes d'observations

II.4. Le Système Géodésique Universel WGS84

Le GPS fournit les coordonnées géodésiques (φ, λ, H) dans le système géocentrique WGS84 (World Geodetic System 84). Il est défini par :

- origine : centre des masses de la Terre,
- axe Z : parallèle à la direction du Pôle Conventionnel Terrestre (PCT),
- axe X : le plan ZX est parallèle au méridien zéro défini par le Bureau International de l'Heure,
- axe Y : dans l'équateur du PCT et perpendiculaire au plan ZX dans le sens direct.

BIH-Defined CTP (1984.0)



Le Référentiel Spatial WGS84

- Au référentiel WGS84, on associe l'ellipsoïde WGS84 dont les paramètres sont :
 - a le demi-grand axe : 6 378 137.00 ±2 m,
 - l'aplatissement $f = 1/298.257\ 223\ 563$.
- Au lieu d'utiliser l'ellipsoïde WGS84, on utilise l'ellipsoïde GRS80 adopté par l'Association Internationale de Géodésie (AIG) ayant le même demi-grand axe que le WGS84 et un aplatissement de 1/298.257 222 101.
- Rappel, l'aplatissement est donné par :
$$f = \frac{a - b}{a}$$

II.5. Le Modèle de Bursa-Wolf de Passage des Coordonnées Tridimensionnelles $(X,Y,Z)_L$ aux coordonnées $(X,Y,Z)_{GPS}$

On désigne par:

- $\mathbf{X}_1 = (X,Y,Z)_L^T$ le point géodésique dans le système local (Clarke 1880),
- $\mathbf{X}_2 = (X,Y,Z)_{GPS}^T$ le point géodésique dans le système WGS84.

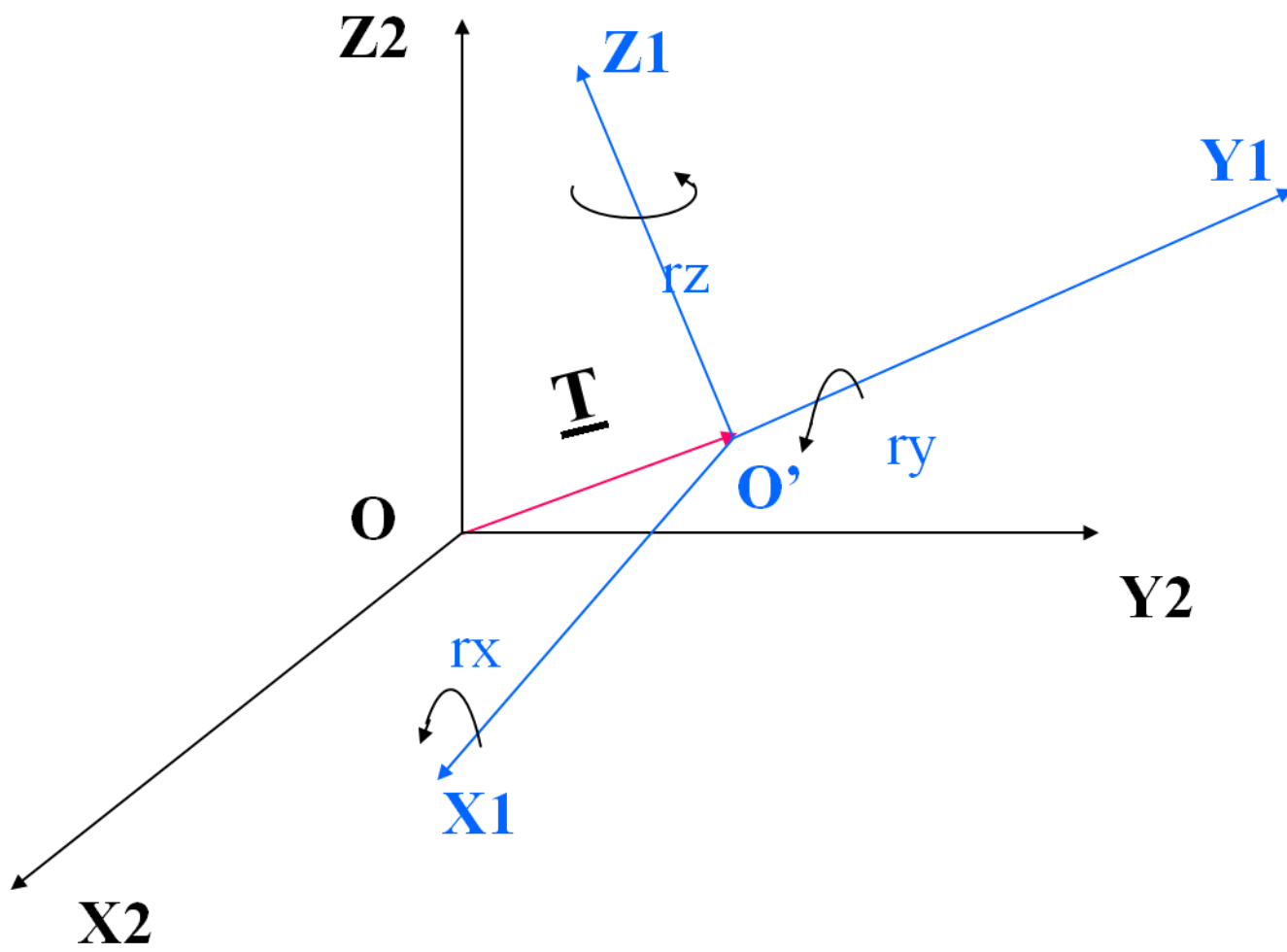
Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T} + (1+m) \cdot \mathbf{R}(rx,ry,rz) \cdot \mathbf{X}_1 \quad (1)$$

\mathbf{T} : est le vecteur translation de composantes $(Tx,Ty,Tz)^t$ entre les systèmes 1 et 2,

$1+m$: est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,

$\mathbf{R}(rx,ry,rz)$: est la matrice de rotation (3,3) pour passer du système 1 au système 2.



Le Modèle de Bursa-Wolf

En développant (1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs numériques des paramètres de l'équation ci-dessus, on observe un ensemble de points communs connus dans les deux systèmes géodésique local (Clarke 1880) et GPS (WGS84).

On détermine ces valeurs par la méthode des moindres carrés:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Bibliographie:

A. BEN HADJ SALEM. 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens*, publié par Nour-Publishing, 365 pages. ISBN - 13 : 978-3-330-96843-1 (lien:<https://www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-desmoindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1>).

MIFERMA E 103. Répertoire Général des Eléments Topographiques de la KEDIA d'IDJIL. 80p. (1958).

C.J. MUGNIER. 2009. *Grids & Datums of the Islamic Republic of Mauritania. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing Journal. Issue 6, June, 2 pages.*

A. BEN HADJ SALEM. 2024. *Présentation des cas 4,5 et 7 paramètres de la transformation de Bursa-Wolf.* vixra.org/pdf/2401.0017v2.pdf, 14 pages.

A. BEN HADJ SALEM. 2021. *Cours de Cartographie Mathématique à l'Usage des Ingénieurs.* vixra.org/pdf/2110.0110v1.pdf, 216 pages.