Note sur le Passage des Coordonnées (X, Y, Z) aux Coordonnées (φ, λ, h_e)

Abdelmajid Ben Hadj Salem

A la mémoire de mes Parents,
A ma femme Wahida, ma fille Sinda et mon fils Mohamed Mazen

Abstract. In this note, we present another method of passing from geocentric coordinates (X, Y, Z) to geodetic coordinates (φ, λ, he) with respect to an ellipsoid of revolution with parameters (a, e) where a and e are the semi-major axis and the first eccentricity, respectively.

Résumé. La méthode de passage des coordonnées géocentriques (X, Y, Z) par rapport à un système géodésique donné aux coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e), traitée dans nos précédentes publications est la méthode itérative (A. Ben Hadj Salem,[1,2,3]). Dans cette note, on présente une méthode directe de passage (X, Y, Z) aux coordonnées (φ, λ, h_e).

1. Introduction

La méthode de passage des coordonnées géocentriques (X, Y, Z) par rapport à un système géodésique donné aux coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e), traitée dans nos précédentes publications est la méthode itérative (A. Ben Hadj Salem,[1,2,3]). Dans cette note, on présente une méthode directe de passage (X, Y, Z) aux coordonnées (φ, λ, h_e).

L'expression des coordonnées géocentriques est:

$$X = (N + h_e)cos\varphi cos\lambda \tag{1}$$
$$Y = (N + h_e)cos\varphi sin\lambda \tag{2}$$
$$Z = (N(1 - e^2) + h_e)sin\varphi \tag{3}$$

2. Résolution du Problème

2.1. Calcul de la longitude

Des équations (1)-(2), on obtient la longitude géodésique λ par:

$$tg\lambda = \frac{Y}{X} \Longrightarrow \text{ d'où } \lambda \tag{4}$$

2.2. Calcul de la latitude géodésique

Posons:

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} = (N + h_e)cos\varphi \tag{5}$$

Comme $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, alos $cos\varphi \geq 0$ donc $p \geq 0$.

De l'équation (5), on a:

$$h_e = \frac{p}{cos\varphi} - N \tag{6}$$

En remplaçant h_e dans l'équation (3), on :

$$Z = (N - e^2N + \frac{p}{cos\varphi} - N)sin\varphi \tag{7}$$

soit:

$$-e^2Nsin\varphi = Z - ptg\varphi \tag{8}$$

Comme

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2sin^2\varphi}}$$

on élève au carré les deux membres de (8), et on obtient l'équation:

$$(Z - ptg\varphi)^2 = \frac{e^4a^2sin^2\varphi}{1 - e^2sin^2\varphi} \tag{9}$$

Posons:

$$t = tg\varphi \tag{10}$$

Alors:

$$sin^2\varphi = 1 - cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \tag{11}$$

L'équation (9) devient:

$$(Z - pt)^2 = \frac{a^2e^4t^2}{1 + k^2t^2} \tag{12}$$

$$\text{avec } k^2 = 1 - e^2 \tag{13}$$

Pour déterminer t, l'équation (12) implique la résolution d'un polynôme du quatrième degré en t à savoir:

$$(Z - pt)^2(1 + k^2t^2) = a^2e^4t^2 \tag{14}$$

$$\text{ou } pkt^4 - 2pZkt^3 + (kZ + p - ae^4)t - 2pZt + Z = 0 \tag{15}$$

2.2.1. Résolution de l'Equation du Quatrième Degré. Pour résoudre l'équation (15), on commence par éliminer le terme en t^3. Pour cela posons:

$$t = T + \frac{Z}{2p} \tag{16}$$

Alors l'équation (15) s'écrit avec comme nouvelle variable T:

$$pkT^4 + (p - ae^4 - \frac{kZ}{2})T - Z(p + \frac{ae^4}{p})T + \frac{Z(4p - 4ae^4 + k)}{16p} = 0 \tag{17}$$

On peut écrire l'équation (17) sous la forme:

$$T^4 + lT^2 + mT + n = 0 \tag{18}$$

où l, m et n sont des constantes. Pour résoudre (17), on utilise la méthode de Cardan [4] qui consiste à écrire (17) sous la forme:

$$T^4 + lT^2 + mT + n = (T^2 + aT + b)(T^2 + cT + d) = 0 \tag{19}$$

où a, b, c et d des constantes fonction de l, m, n. On trouve que a est solution d'un polynôme de 3ème degré. On a alors:

$$(T^2+aT+b)(T^2+cT+d) = T^4+(a+c)T^3+(ac+d+b)T^2+(ad+bc)T+bd \tag{20}$$

D'où:

$$a + c = 0 \tag{21}$$

$$ac + d + b = l \tag{22}$$

$$ad + bc = m \tag{23}$$

$$bd = n \tag{24}$$

De (21), on :

$$c = -a \tag{25}$$

de (22) et (23), on a:

$$d + b = l + a^2 d - b = \frac{m}{a}$$

ce qui donne:

$$d = \frac{al + a^3 + m}{2a} \tag{26}$$

$$b = \frac{al + a^3 - m}{2a} \tag{27}$$

On utilise l'équation (24) pour déterminer a ce qui donne:

$$\frac{al + a^3 + m}{2a} . \frac{al + a^3 - m}{2a} = n$$

soit:

$$a^2(l + a^2)^2 - m^2 = 4a^2 n \tag{28}$$

Et en posant:

$$u = a^2 \tag{29}$$

u vérifie alors:

$$u^3 + 2lu^2 + (l^2 - 4n)u - m^2 = 0 \tag{30}$$

2.2.2. Résolution de $x^3+\alpha x^2+\beta x+\delta=0$. On pose:

$$x = X - \frac{\alpha}{3} \tag{31}$$

L'équation $x^3+\alpha x^2+\beta x+\delta=0$ devient:

$$X^3 + AX + B = 0 \tag{32}$$

Pour résoudre (32), on pose:

$$X = v + w \tag{33}$$

Et (32) devient:

$$v^3 + w^3 + (v+w)(3vw + A) + B = 0 \tag{34}$$

On choisit v et w telque :

$$3vw + A = 0 \tag{35}$$

Donc v^3 et w^3 sont solutions de l'équation du second degré:

$$\zeta^2 + B\zeta - \frac{A^3}{27} = 0 \tag{36}$$

3. Application

On considère un point A de coordonnées géodésiques dans le système NTT:

$$\varphi = 41.2534\ gr \tag{37}$$

$$\lambda = 11.6587\ gr \tag{38}$$

$$h_e = 754.25\ m \tag{39}$$

On donne $a = 6378249.20\,m$ et $e = 0.0068034877$ les paramètres de l'ellipsoide de référence à savoir l'ellipsoide de Clarke français 1880. En utilisant (1), (2) et (3), on obtient les coordonnées géocentriques:

$$X = 5\,007\,066.24\,m \tag{40}$$

$$Y = 927\,356.\,78\,m \tag{41}$$

$$Z = 3\,828\,912.09\,m \tag{42}$$

On suppose qu'on a (X, Y, Z) données par les valeurs (40), (41) et (42). On cherche à déterminer (φ, λ, h_e).

3.1. Calcul de la longitude géodésique

Utilisant (1), on obtient:

$$\frac{927\,356.78}{5\,007\,066.24} = 0.185209609 \Longrightarrow \lambda = 11.6586999 = 11.6587\,gr \tag{43}$$

3.2. Calcul de la latitude géodésique

On a :

$$p = \sqrt{X+Y} = 5\,092\,219.843\,m \tag{44}$$

3.2.1. Calcul des coefficients l, m et n de (18). On a posé $t = tg\varphi$. L'équation (12) devient numériquement:

$$(0.751914137 - t)^2.(1 + 0.993196513t^2) = 0.000057977t^2 \tag{45}$$

ou encore:

$$t^4 - 1.503828274t^3 + 1.572151845t^2 - 1.514129635t + 0.569247739 = 0 \tag{46}$$

Pour éliminer le coefficient de t^3, on fait le changement de variables (16) ce qui donne numériquement:

$$t = T + 0.375957069 \tag{47}$$

Par suite, on obtient:

$$T^4 + 0.724089547T^2 - 0.757119795T + 0.162279647 = 0 \tag{48}$$

Ce qui donne les valeurs de l, m et n:

$$l = 0.724089541; \quad m = -0.757119795; \quad n = 0.162279647 \tag{49}$$

3.2.2. Calcul de a. On a posé $u = a^2$ et u vérifie l'équation (30) soit numériquement:

$$u^3 + 1.448179082u^2 - 0.124812925u - 0.573230384 = 0 \tag{50}$$

De la même façon, on élimine le coefficient de u^2 dans l'équation précédente en posant:

$$u = U - \frac{1.448179082}{3} = U - 0.482726361 \tag{51}$$

L'équation (50) devient:

$$U^3 - 0.823887143U - 0.288005526 = 0 \tag{52}$$

Résolution de l'équation du troisième degré (52). On a obtenu l'équation précédente sous la forme de l'équation (32) soit:

$$U^3 + A.U + B = 0$$

avec :

$$A = -0.823887143; \quad B = -0.288005526 \tag{53}$$

On pose:

$$U = v + w$$

avec v^3 et w^3 vérifient l'équation:

$$\xi^2 + B\xi - \frac{A^3}{27} = 0$$

ou:

$$\xi^2 - 0.288005526\xi + 0.020712829 = 0$$

C'est une équation du second degré dont la solution est:

$$\xi_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2} \tag{54}$$

$$\xi_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{55}$$

$$\text{avec} \quad \Delta = B^2 + \frac{4A^3}{27} = 0.000095867 \tag{56}$$

Ce qui donne numériquement:

$$\xi_1 = \frac{0.288005526 + 0.009791170}{2} = 0.148898348 \tag{57}$$
$$\xi_2 = \frac{0.288005526 - 0.009791170}{2} = 0.139107178 \tag{58}$$
$$\tag{59}$$

Détermination des inconnues v et w. On a alors le système:

$$v^3 = \xi_1 \tag{60}$$
$$w^3 = \xi_2 \tag{61}$$

Rappel: les solutions de $z^3 = 1$ sont:

- $z_1 = 1$
- $z_2 = j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
- $z_3 = j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

avec : $1 + j + j^2 = 0$

Par suite, la résolution des équations (60)et (61) sont:

$$v_1 = \xi_1^{\frac{1}{3}} \tag{62}$$
$$v_2 = j.\xi_1^{\frac{1}{3}} \tag{63}$$
$$v_3 = j^2.\xi_1^{\frac{1}{3}} \tag{64}$$
$$w_1 = \xi_2^{\frac{1}{3}} \tag{65}$$
$$w_2 = j.\xi_2^{\frac{1}{3}} \tag{66}$$
$$w_3 = j^2.\xi_2^{\frac{1}{3}} \tag{67}$$

Comme $U = v + w > 0$ et que v, w vérifient la condition (35), on choisit :

$$v = v_1 = 0.530025332 \quad \text{et} \quad w = w_1 = 0.518143252 \tag{68}$$

Ce qui donne:

$$vw = v_1.w_1 = \xi_1^{\frac{1}{3}}.\xi_2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.148898348 \times 0.139107178} = 0.274629049 > 0 \tag{69}$$
$$U = v + w = .530025332 + 0.518143252 = 1.048168584 \tag{70}$$

En revenant à u, on a:

$$u = U - 0.482726361 = 0.565442223 = a^2 \Rightarrow a = \pm 0.751958924$$

Prenant la valeur positive de a. On a alors:

$$a = +.751958924 \tag{71}$$
$$b = 1.148197500 \tag{72}$$
$$c = -a = -0.751958924 \tag{73}$$
$$d = 0.141334265 \tag{74}$$

Contrôle $b.d = 0.162279650 \cong 0.162279647$ la valeur de n (éq. (49)).

3.2.3. Calcul de la latitude géodésique φ. On revient à la résolution du polynôme du quatrième degré en T. On a alors:

$$T^2 + a.T + b = 0 \Leftrightarrow T^2 + 0.751958924 \times T + 1.148197500 = 0 \tag{75}$$
$$T^2 + c.T + d = 0 \Leftrightarrow T^2 - 0.751958924 \times T + 0.141334265 = 0 \tag{76}$$

La première équation a des racines complexes, quant à la deuxième, elle a deux racines réelles distinctes à savoir:

$$T_1 = 0.381106922 \Rightarrow t_1 = T_1 + \frac{Z}{2p} = 0.757063991 = tg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = 41.2533919\, gr \tag{77}$$

$$T_2 = 0.370852002 \Rightarrow t_2 = T_2 + \frac{Z}{2p} = 0.746809071 = tg\varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 = 40.836343\, gr \tag{78}$$

Parmi φ_1, φ_2 que faut-il choisir? Il faut que la latitude géodésique choisie vérifie l'équation (8) soit

$$ptg\varphi - e^2 N sin\varphi = Z$$

Or le calcul montre que φ_1 est la solution à choisir soit

$$\varphi = \varphi_1 = 41.2533919\, gr \tag{79}$$

3.2.4. Calcul de l'altitude ellipsoidique h_e. Pour déterminer l'altitude ellipsoidique h_e, on peut utiliser (1) ou (2). Prenant la première équation, on a:

$$h_e = \frac{X}{cos\varphi.cos\lambda} - N(\varphi) = 753.635\, m \tag{80}$$

Finalement, les coordonnées du point M sont:

$$M \begin{cases} \varphi = 41.2533\,919\, gr \\ \lambda = 11.6586\,999\, gr \\ h_e = 753.63\, m \end{cases}$$

References

1. **A. Ben Hadj Salem**. 2017. Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés pour les Elèves-Ingénieurs Géomaticiens, publié par Nour-Publishing, 365 pages. ISBN - 13 : 978-3-330-96843-1 (lien:https //www.morebooks.de/store/gb/book/eléments-de-géodésie-et-de-la-théorie-desmoindres-carrés/isbn/978-3-330-96843-1).
2. **A. Ben Hadj Salem**. 2010. Notions Fondamentales de Géodésie pour les Techniciens Topographes. v1. Septembre 2010. 71p.
3. **A. Ben Hadj Salem**. 2005. Les Systèmes Géodésiques et les représentations planes en Usage à l'OTC. Cours de formation donné aux techniciens de l'OTC. Août - Juillet 2005. 30p.

Abdelmajid Ben Hadj Salem
Résidence Bousten 8, Mosquée Raoudha, Bloc B
1181 Soukra Raoudha
Tunisia.
e-mail: `abenhadjsalem@gmail.com;`
`v2. Juillet 2024`