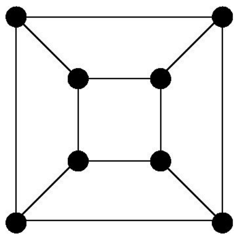
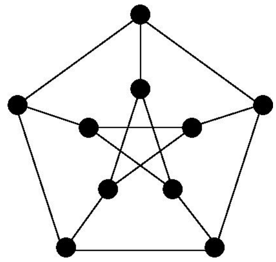
EPFL - Cours “Information, Calcul et Communication”

Exemples d’exercices - Semaine 4

1 Coloriage de graphes

On considère un graphe avec n sommets et un certain nombre d’arêtes qui relient ces sommets, comme par exemple un des deux graphes suivants :





On se pose la question générale suivante :

Soit $k \geq 2$ un nombre fixé. Avec k couleurs différentes à disposition, est-il possible de colorier les sommets d’un graphe donné de façon à ce que si deux sommets sont reliés par une arête, alors ils aient toujours des couleurs différentes ?

Avant d’aller plus loin, voici une petite application pour le cas où $k = 2$: n joueurs se retrouvent ensemble et désirent former deux équipes (pas forcément de même taille : ça simplifie le problème). Seule contrainte : un graphe comme le graphe ci-dessus indique les joueurs qui ne s’aiment pas et ne veulent donc pas faire partie de la même équipe : plus précisément, i n’aime pas j si et seulement si i et j sont reliés directement par une arête. Est-il possible de former deux équipes avec des joueurs qui n’ont aucune inimitié à l’intérieur de chaque équipe ?

a) Quelle est la réponse à cette question pour chacun des graphe ci-dessus (dans le cas où $k = 2$) ?

Faisons maintenant un petit calcul ensemble : pour résoudre la question en général pour un n et un k donnés, on a toujours l’option d’essayer *toutes* les possibilités de coloriages du graphe. Combien sont-elles, ces possibilités ? Vu qu’on a k choix pour chacun des n sommets, on a en tout k^n possibilités, autement dit un nombre qui croît exponentiellement en n. Si n est grand, essayer toutes les possibilités prend clairement trop de temps (même pour $k = 2$).

b) Considérons tout d’abord le cas particulier $k = 2$ et supposons que vous deviez trouver vous-même un coloriage qui marche, sans aide extérieure. Quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème ? (qu’avez-vous fait pour répondre à la question a ?)

c) Toujours dans le cas $k = 2$, combien d’opérations *au pire*[1] seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu’une telle solution n’existe pas), en fonction du nombre de sommets n ? (donner la réponse en utilisant la notation de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$)

d) Considérons maintenant le cas plus général $k \geq 2$ et supposons qu’on vous *donne* un coloriage avec k couleurs pour un graphe donné et qu’on vous demande de *vérifier* si ce coloriage fonctionne. En fonction du nombre de sommets n, combien d’opérations seront-elles nécessaire pour vérifier que le coloriage fonctionne, dans le pire des cas ? (utiliser à nouveau la notation de Landau $\mathcal{O}(\cdot)$)

e*) Dans le cas particulier $k = 3$, quel algorithme utiliserez-vous pour trouver une solution au problème, si vous laisse la trouver par vous-même ? (à nouveau, essayez d’abord sur les exemples de graphes ci-dessus) Et combien d’opérations seront-elles nécessaires pour trouver une solution (ou au contraire conclure qu’une telle solution n’existe pas) ?

Attention : Cette dernière question est (beaucoup) plus difficile qu’il n’y paraît : en fait, même les plus grands scientifiques de la planète n’ont encore trouvé la réponse : ne désespérez donc pas si vous n’y arrivez pas du premier coup !

[Note historique : C’est grâce à l’informatique qu’on a pu démontrer *mathématiquement* que 4 couleurs suffisent pour colorier tous les graphes dits *planaires*, c’est-à-dire les graphes correspondant à nos bonnes vieilles cartes de géographie (où on identifie les pays avec les sommets du graphe et les frontières communes entre deux pays avec les arêtes du graphe).]

1. Imaginez le graphe le plus complexe possible avec n sommets.