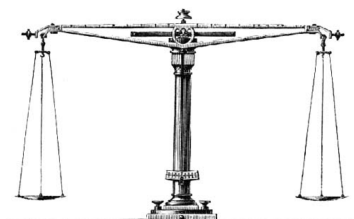


Exemples d'exercices - Semaine 8

1 Quelques pièces de monnaie

a) Vous avez devant vous 9 pièces de monnaie, identiques en apparence, mais quelqu'un vous dit que l'une d'elles est fautive et pèse un peu moins lourd que les autres. Pour identifier la fautive pièce, vous disposez d'une balance :



avec laquelle il est possible d'effectuer des pesées. Le résultat de chaque pesée peut être "la balance penche à gauche", "la balance penche à droite" ou "la balance reste stable".

En admettant que vous utilisez une stratégie optimale, quel est le nombre *minimum* de pesées qu'il vous faut exécuter pour identifier la fautive pièce ? Et quelles sont ces pesées ?

Indication : Commencez par le problème plus simple où vous n'avez que 3 pièces devant vous.

b) Supposons maintenant que vous ayez 4 pièces devant vous, et que l'on vous indique qu'*au plus* une d'entre elles est fautive, *sans vous dire si celle-ci est plus légère ou au contraire plus lourde que les autres*. Pour vous aider, vous avez cette fois une pièce additionnelle dans votre poche que vous savez être vraie et que vous pouvez utiliser pour les pesées.

En admettant que vous utilisez une stratégie optimale, quel est le nombre minimum de pesées qu'il vous faut exécuter (et à nouveau, quelles pesées effectuerez-vous ?) pour être en mesure de répondre aux trois questions suivantes (prises ensemble) : y a-t-il une fautive pièce ? le cas échéant, quelle est-elle ? et est-elle plus lourde ou plus légère que les autres ?

2 Est-ce que l'entropie augmente ou diminue ?

a) Considérons une séquence de lettres de longueur N finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui fait déjà partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $N + 1$) diminue ?

b) Considérons une séquence de lettres de longueur N finie. Est-il *toujours* vrai que si on ajoute à cette séquence une lettre qui ne fait pas partie de la séquence, alors l'entropie de la nouvelle séquence (de longueur $N + 1$) augmente ?

Note : Pour répondre à chacune de ces deux questions, vous devez soit prouver que c'est toujours vrai (ce qui peut s'avérer assez difficile, mais une première étape serait de vous convaincre que la réponse doit être positive à l'aide de plusieurs exemples), soit trouver un contre-exemple à l'affirmation énoncée.