Magic 60 Problems Level H NO.1

1

(1) Evaluate the following numerical expressions.

① $64 \div \{ (15 - 11) \times 2 \} =$

② $\frac{11}{18} \div \frac{22}{9} =$

(2)

① Evaluate the expression when $a = 1.2$, $b = 6.5$, $c = 2$.

$a + |c - (b - 0.5)| =$

② Calculate the following expression efficiently and show the process.

$\frac{3}{4} \times 5 - \frac{3}{4} \times 7 =$

(3) There are about 100 billion stars in the Milky Way. It is said that there are about 100 billion galaxies in the universe. How many stars are in the universe?

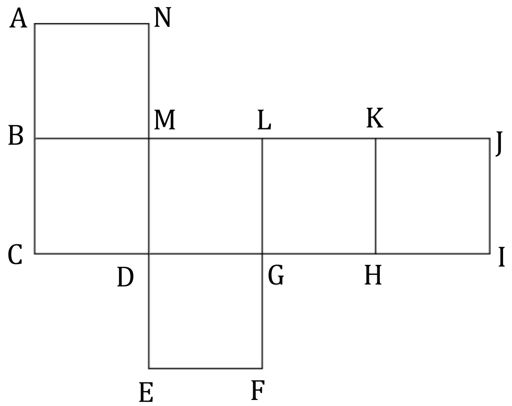
(4) A jet plane flies $870km$ per hour. Write its rate in km per minute.

(5) The sum of two numbers is 139. The difference of their numbers is 9. What are the numbers?

(6) The figure is a net of a cube.

① Which is the side overlapping with side AB?

② Which plane is parallel to plane ABMN?



Magic 60 問題 レベルＨ　NO.１

1

（1）次の数式を計算しなさい。

① $64 \div \{(15-11) \times 2\} =$

② $\dfrac{11}{18} \div \dfrac{22}{9} =$

（2）

① $a = 1.2$ ， $b = 6.5$ ， $c = 2$ のとき次の式を計算しなさい。

$a + |c - (b - 0.5)| =$

② 次の式を工夫して計算しなさい。計算過程も示しなさい。

$\dfrac{3}{4} \times 5 - \dfrac{3}{4} \times 7 =$

（3）銀河には 1000 億個の星があり，宇宙には 1000 億個の銀河があると言われています。宇宙には，およそいくらの星があるでしょう。

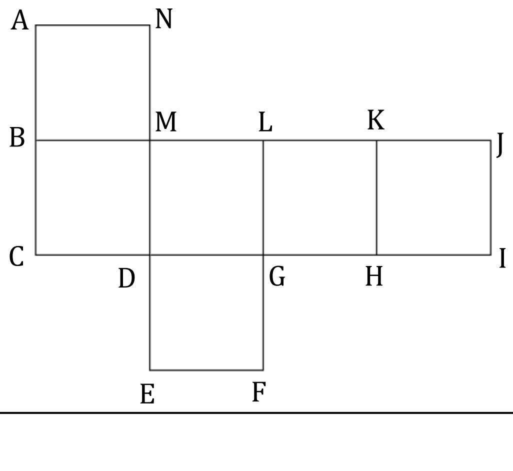
（4）ジェット機が時速 870 kmで飛んでいます。
ジェット機の分速（km/分）を求めなさい。

（5）2 つの数の和が 139 で，差が 9 です。これらの数をそれぞれ求めなさい。

（6）図は立方体とその展開図を表しています。

① 辺 AB と重なる辺を答えなさい。

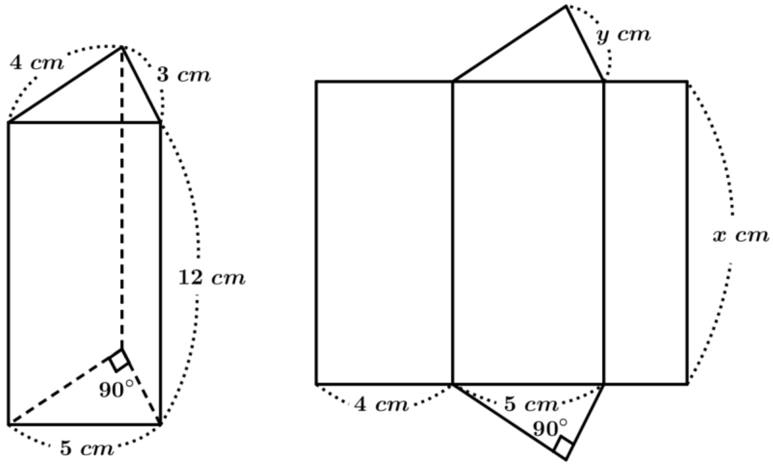
② 平面 ABMN と平行な面を答えなさい。



(7) The figures show a triangle prism and its net.

① Find the values x and y.

② Find the surface area of the triangle prism.



2

(8) There were about 200,000 spectators at a high school baseball competition this year.
The number of spectators increased by 25 % over last year.
About how many spectators were there last year?

(9) Find the circumference of the circle where the diameter is $8\ cm$.
Use 3.14 for the circle constant. Then round to the nearest whole number.

(10) Order the ratios from least to greatest.

$4:3$, $\frac{6}{11}$, $3:5$, $\frac{3}{7}$, $7:3$

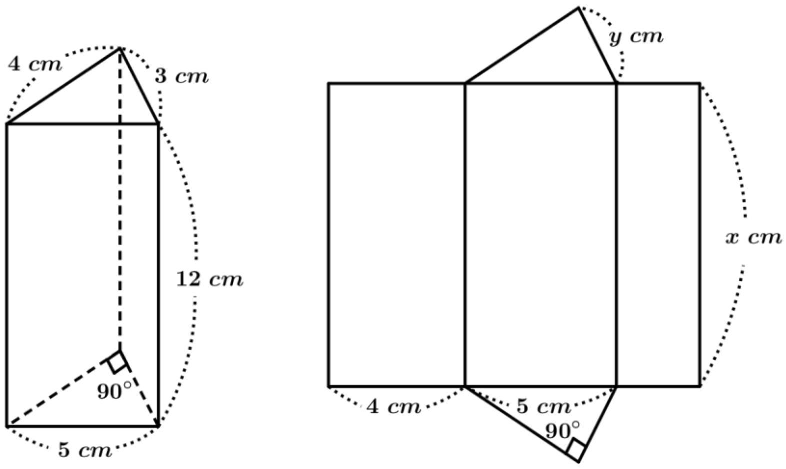
(11) A mother is 40 years old. Her daughter is 10 years old and her son is 8 years old.
How many years will it take until the sum of two children's ages is equal to their mother's age?

(12) Write the verbal sentence as an equation. Then solve the equation.
Three times a number x minus 10 is equal to 15.

(7) 図は三角柱とその展開図を示しています。

① x ，y の値を答えなさい。

② 三角柱の表面積を求めなさい。



2

(8) 今年の高校野球の入場者数はおよそ 20 万人でした。入場者数は昨年から25 % 増加しました。昨年の高校野球の入場者数を求めなさい。

(9) 直径が $8\,cm$ の円の周の長さを求めなさい。円周率は 3.14 とします。得られた結果は整数になるよう四捨五入しなさい。

(10) 次の比を小さいものから順に並べなさい。

$4:3$ ， $\frac{6}{11}$ ， $3:5$ ， $\frac{3}{7}$ ， $7:3$

(11) 母の年齢は 40 歳です。娘は 10 歳で息子は 8 歳です。二人の子供の年齢の和が母の年齢に等しくなるのは何年後ですか。

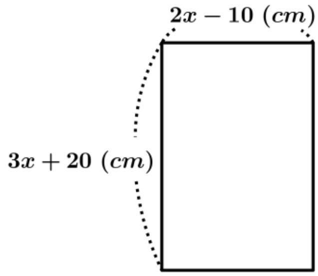
(12) ある数を x とおき，次の文章に関する方程式を立てて求めなさい。ある数を 3 倍し，それから 10 を引くと 15 になる。

$\boxed{3}$

(13) Solve the equation.

$$1\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = \frac{5}{24}$$

(14) Find the value of x for the following rectangle whose perimeter is $220\ cm$.

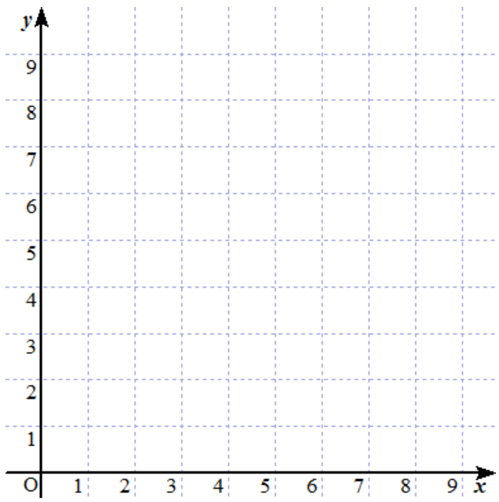


(15) There are the following 5 data.

① Plot the 5 points in a coordinate plane.

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

② When you connect the above 5 points smoothly, tell what kind of curve is obtained.

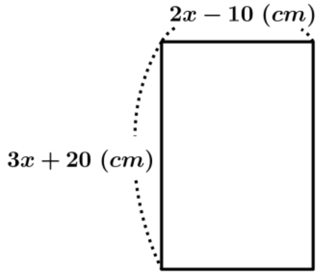


3

(13) 次の式を解きなさい。

$$1\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = \frac{5}{24}$$

(14) 図に示すような周囲の長さが $220\ cm$ の長方形があります。
x を求めなさい。



(15) 表に 5 点のデータがあります。
① 表の 5 点のデータを座標平面に書き入れなさい。

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

② 表の 5 点をなめらかに接続すると，どのような図が得られますか。

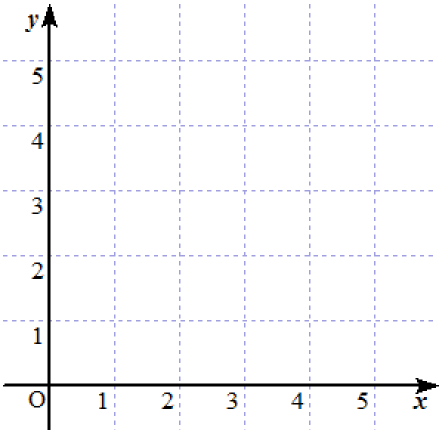
4

(16)

① Draw the triangle ABC with vertices A(0 , 0), B(2 , 0) and C(2 , 2).

② Draw the image with new vertices of (A', B', C') after a dilation having a scale factor of 2.

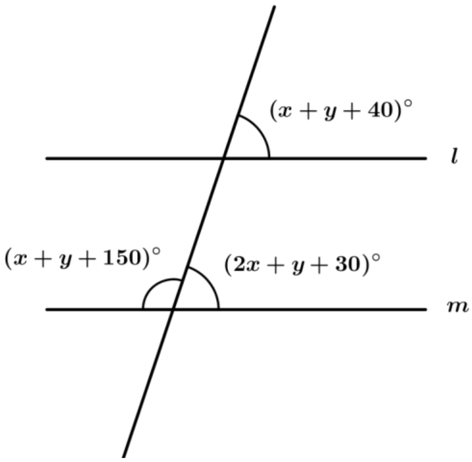
③ Find the area of the enlarged triangle A' B'C'.   unit : cm



(17) Find the slope and the equation of the line through the given points.

(2, −5) , (8 , 1)

(18) Find the values of x and y that make lines l and m parallel.



(19) Evaluate the expressions when $a = -5$

① $\sqrt{1521} - a =$

② $\sqrt{(a-7)^2 - 23} =$

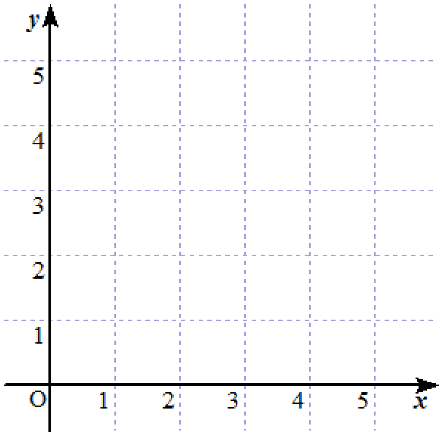
4

(16)

① 頂点が A(0 , 0)，B(2 , 0)，C(2 , 2)の三角形を描きなさい。

② ①の三角形を 2 倍に拡大した三角形 A' B' C'を描きなさい。

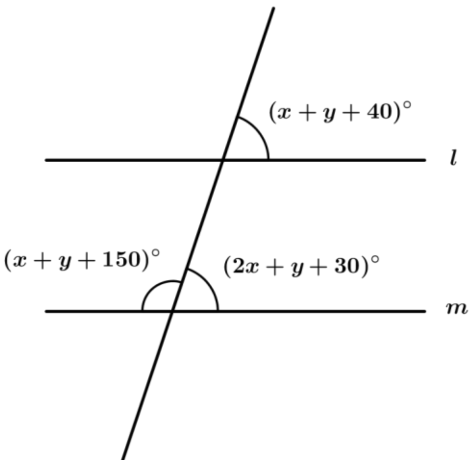
③ 拡大した三角形 A' B' C'の面積を求めなさい。　単位：cm



(17) 与えられた 2 点を通る直線と，その傾きを求めなさい。

(2，−5)，(8 , 1)

(18) 直線 l と直線 m を平行にするには，x と y をどのように選べばよいですか。



(19) $a=-5$ のとき，次の式を計算しなさい。

① $\sqrt{1521}-a=$

② $\sqrt{(a-7)^2-23}=$

(20)

① Simplify the expression.

$$\frac{3x^3}{20} \times \frac{6z^2}{15} =$$

② Evaluate the following expression.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{7})^2 =$$

(21) Find the product and the quotient.

① $(x^2 + 2x + 7)x^3 =$

② $\dfrac{21x^3y^4z^2}{7x^2y^2z^2} =$

(22)

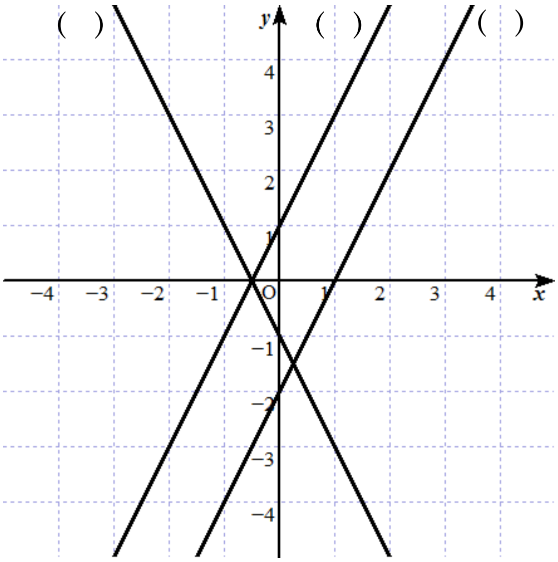
① Match the equation with its graph.

(a) $y = 2x + 1$

(b) $y + 1 = -2x$

(c) $y = 2x - 2$

② Draw the result of the (graph (b) + graph(c)).



(20)

① 次の分数を約分しなさい。

$$\frac{3x^3}{20} \times \frac{6z^2}{15} \ =$$

② 次の式を計算しなさい。

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{7})^2 =$$

(21) 次の多項式の積と商を求めなさい。

① $(x^2 + 2x + 7)x^3 =$

② $\dfrac{21x^3y^4z^2}{7x^2y^2z^2} =$

(22)

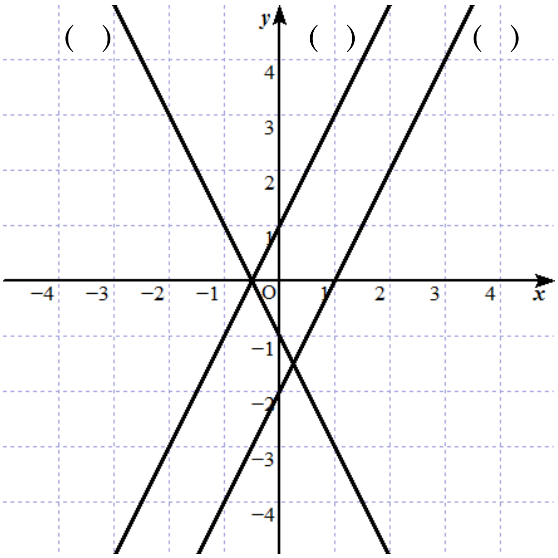
① グラフと式を対応させなさい。

(a) $y = 2x + 1$

(b) $y + 1 = -2x$

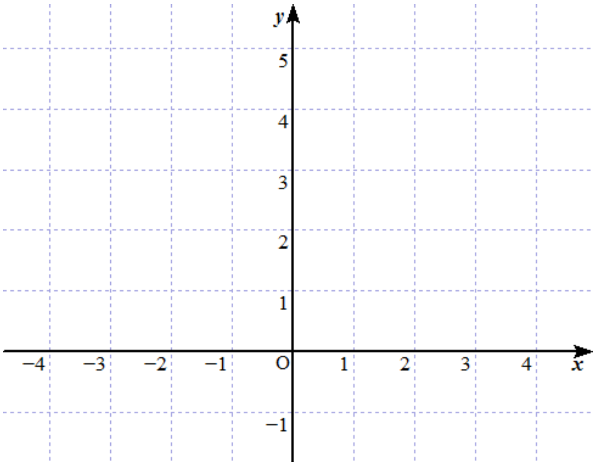
(c) $y = 2x - 2$

② ①の グラフ(b) + グラフ(c) の結果を描きなさい。



5

(23) Given the segment with endpoints A(-2 , 3) and B(3 , 5), draw the image of the segment after the reflection with respect to the y -axis.



(24) Solve the quadratic equation.

$3x^2 + 12x - 15 = 0$

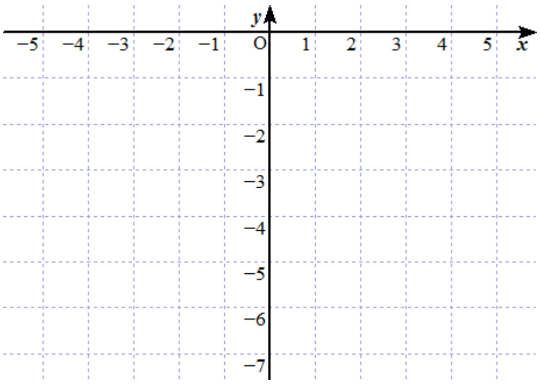
(25) Factorize the expression.

$16 - (x-2)^2 =$

(26) There are two points A(4 ,-8) and B(-4 ,-8).

① Draw the two points in the coordinate plane.

② Find the quadratic equation that passes through these two points and the origin.



(27) The numbers 1 through 10 are shown on 10 cards. When one of the cards is randomly drawn, find the probability that the card is a prime number.

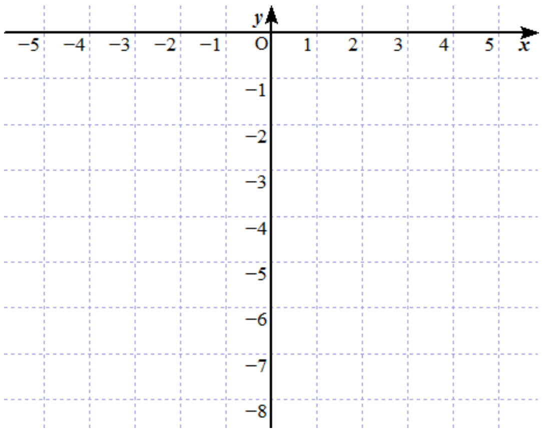
5

(23)　A$(-2,3)$，B$(3,5)$ の線分 AB があります。
この線分を y 軸に対称に移しました。その図形を描きなさい。

(24)　次の 2 次方程式を解きなさい。
$3x^2+12x-15=0$

(25)　次の式を因数分解しなさい。
$16-(x-2)^2=$

(26)　2 点 A$(4,-8)$，B$(-4,-8)$があります。
① A，B を座標平面上に描きなさい。
② A，B と原点を通る 2 次式を求めなさい。



(27)　10 枚のカードに 1 から 10 までの数字のどれかが書き込まれています。
10 枚のカードからランダムに 1 枚のカードを引いたとき，そのカードが素数である確率を求めなさい。

$\boxed{6}$

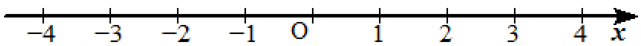
(28) Show the domain and the range of the relation.

$(-3, 2), (1, 3), (3, 5), (4, 8)$

(29) If A $=$ {whole numbers} B $= \{-1, 0, 5, 8\}$,

Find ①A $\cup$ B and ② A $\cap$ B.

(30) You can show the solution of an inequality on a number line. When you graph an inequality $x > k$ or $x < k$, use an open circle at k. When you graph an inequality $x \geq k$ or $x \leq k$, use a closed circle at k. Solve $x - 3 \geq -2$. Graph your solution.



(31) Evaluate ① $64^{-\frac{3}{4}}$ and ② $(-27)^{\frac{1}{3}}$.

(32) Factor the following polynomial.

$14ac - 21ad + 6bc - 9bd =$

(33) Solve $x - 2 = \sqrt{x}$

(34) You can describe a translation of each point (x, y) of a figure using coordinate notation $(x, y) \to (x + a, y + b)$ where a indicates how many units the point moves horizontally, and b indicates how many units the point moves vertically. There is $y = 2x^2 - 3x + 1$. When the above translation $(x, y) \to (x + a, y + b)$ makes $y = 2x^2 + x + 2$, find the translation factors a and b.

(35) Solve the system of equations.

$$\begin{cases} xy = 3 \\ 2y - 3x - 3 = 0 \end{cases}$$

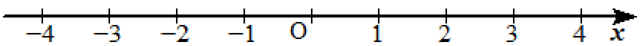
6

(28) 以下の関係の定義域と値域を示しなさい。

$(-3, 2), (1, 3), (3, 5), (4, 8)$

(29) 集合　$A = \{0$ とすべての自然数$\}$　集合 $B = \{-1, 0, 5, 8\}$のとき，
次の集合を求めなさい。 ①$A \cup B$　② $A \cap B$

(30) 数直線上に不等式の解を示すことができます。$x > k$ あるいは $x < k$の不等式をグラフに表すときは，k点を白丸とし，$x \geq k$ あるいは$x \leq k$のときは k点を黒丸で表すことにします。
不等式 $x - 3 \geq -2$ を解き，グラフに示しなさい。



(31) ① $64^{-\frac{3}{4}}$ と ② $(-27)^{\frac{1}{3}}$ を計算しなさい。

(32) 次の多項式を因数分解しなさい。

$14ac - 21ad + 6bc - 9bd =$

(33) $x - 2 = \sqrt{x}$ を解きなさい。

(34) 図形の各点 (x, y) の移動を座標記号で次のように表します。
$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ ただし，a は水平方向の移動の大きさ，b は垂直方向の移動の大きさを表しています。 $y = 2x^2 - 3x + 1$ があります。y に上で述べたような移動を行った結果，$y = 2x^2 + x + 2$ となりました。移動した大きさ a ，b を求めなさい。

(35) 次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} xy = 3 \\ 2y - 3x - 3 = 0 \end{cases}$$

(36)

① Change $1110101_{(2)}$ in the binary system to the form of a decimal system.

② Change $1110101_{(2)}$ in the binary system to the form of a ternary system.

(37) Given $tan\theta = -\frac{5}{2}$, find the $sin\theta$ and the $cos\theta$ where $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(38) The following table lists the height of the students in a classroom.
Find the mean, median, and mode for this data.

height	147	148	149	149	150	155	160	170

(39) Rationalize the expressions.

① $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

② $\frac{1}{\sqrt{4y+x-4\sqrt{xy}}} =$

$(4y > x)$

(40) Find the value of the constant m in the quadratic equation
$4x^2 - (m+2)x - 8(m-2) = 0$
when the difference of the roots is 6, and m is limited to $0<m<10$.

(36)

① 2 進数 $1110101_{(2)}$ を 10 進数へ変えなさい。

② 2 進数 $1110101_{(2)}$ を 3 進数へ変えなさい。

(37) $tan\theta = -\frac{5}{2}$ が与えられています。 $sin\theta$ ， $cos\theta$ を求めなさい。

ただし，θ の範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とします。

(38) 次のテーブルは，あるクラスの学生の身長を示しています。

このデータの平均値，メディアン，モードを求めなさい。

身長	147	148	149	149	150	155	160	170

(39) 次の式を有理化しなさい。

① $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

② $\frac{1}{\sqrt{4y+x-4\sqrt{xy}}} =$

$(4y > x)$

(40) 次の 2 次式の解の差が 6 のとき，定数 m を求めなさい。

$4x^2 - (m + 2)x - 8(m - 2) = 0$

ただし，m は $0<m<10$ とします。

Magic 60 数学 レベルH NO.1 解説

1

(1) 次の数式を計算しなさい。

① $64 \div \{(15-11) \times 2\} =$

② $\frac{11}{18} \div \frac{22}{9} =$

【解説】

① $64 \div \{(15-11) \times 2\} = 64 \div (4 \times 2)$

$= 64 \div 8$

$= 8$ (答) 8

② $\frac{11}{18} \div \frac{22}{9} = \frac{11}{18} \times \frac{9}{22}$

$= \frac{1}{4}$ (答) $\frac{1}{4}$

(2)

① $a = 1.2$, $b = 6.5$, $c = 2$ のとき次の式を計算しなさい。

$a + |c - (b - 0.5)| =$

② 次の式を工夫して計算しなさい。計算過程も示しなさい。

$\frac{3}{4} \times 5 - \frac{3}{4} \times 7 =$

【解説】

① $a = 1.2$, $b = 6.5$, $c = 2$ を式に代入すると,

$1.2 + |2 - (6.5 - 0.5)| = 1.2 + |2 - 6|$

$= 1.2 + |-4|$

$= 1.2 + 4$

$= 5.2$ (答) 5.2

② $\frac{3}{4} \times 5 - \frac{3}{4} \times 7 = \frac{3}{4} \times (5 - 7)$

$= \frac{3}{4} \times (-2)$

$= -\frac{3}{2}$ (答) $-\frac{3}{2}$

(3) 銀河には 1000 億個の星があり，宇宙には 1000 億個の銀河があると言われています。宇宙には，およそいくらの星があるでしょう。

【解説】

1 億 $=100000000= 10^8$なので，

1000 億 $=1000 \times 100000000=100000000000= 10^{11}$

したがって，1000 億 × 1000 億 $= 10^{11} \times 10^{11} = 10^{22}$　（答） 10^{22}個

(4) ジェット機が時速 870 kmで飛んでいます。
ジェット機の分速（km/分）を求めなさい。

【解説】

時速 870 km のジェットは 1 時間に 870 km 飛行します。

1 時間は 60 分ですから，

$$\frac{870\ km}{60\text{分}}=14.5\ km/\text{分}$$

（答）分速 14.5 km

(5) 2 つの数の和が 139 で，差が 9 です。これらの数をそれぞれ求めなさい。

【解説】

求める数を，x ，y とすると，

$$\begin{cases} x+y=139 \cdots ① \\ x-y=9 \cdots ② \end{cases}$$

①＋ ②より，$2x=148$

$x=74$

$x=74$ を①に代入すると

$74+y=139$

$y=65$

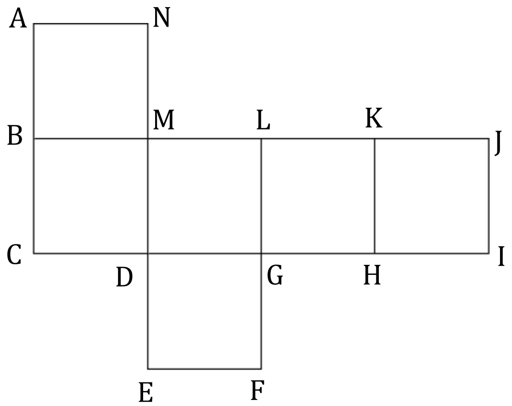
（答） 74 ，65

方程式を立てることなく
$(139-9)\div 2=65$
$65+9=74$
と求めても良い

(6) 図は立方体とその展開図を表しています。

① 辺 AB と重なる辺を答えなさい。

② 平面 ABMN と平行な面を答えなさい。



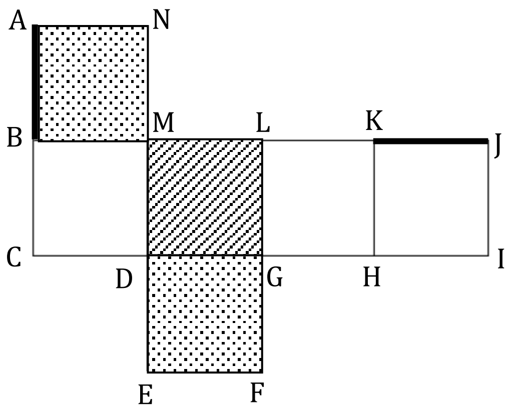
【解説】

基準となる面を決め，できあがる立方体を考えます。

ここでは，四角形 MDGL(斜線部)を基準の面とします。

辺 AB は辺 KJ と対応します(太線部)。

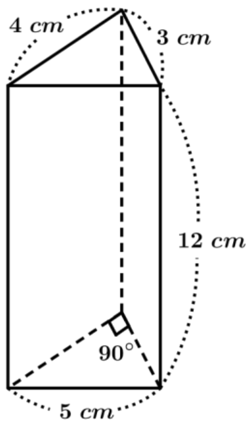
平面 ABMN と平行な面は平面 FEDG となります(点線部)。

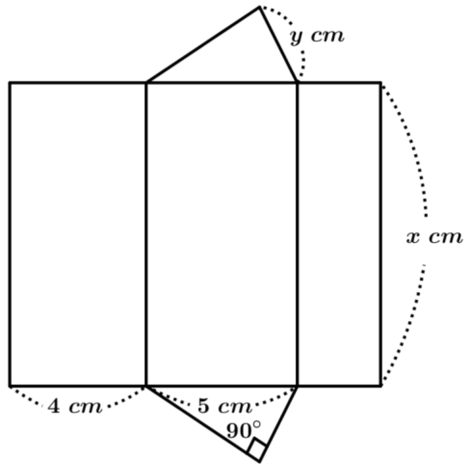


(答) ① 辺 KJ ② 平面 FEDG

(7) 図は三角柱とその展開図を示しています。

① x ， y の値を答えなさい。



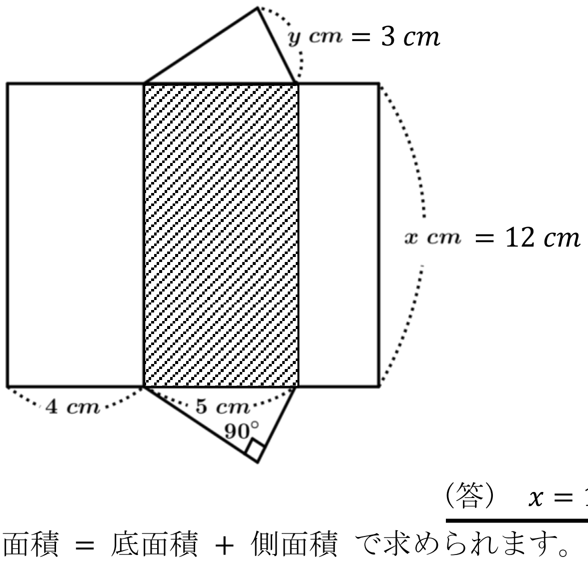


② 三角柱の表面積を求めなさい。

【解説】

① (6) と同様に基準となる面を決め，できあがる立体を考えます。

ここでは斜線部の四角形を基準の面とします。



（答） $x = 12\ cm$ ， $y = 3\ cm$

② 三角柱の表面積 ＝ 底面積 ＋ 側面積 で求められます。

底面積 $= 3 \times 4 \times \dfrac{1}{2} \times 2 = 12$ ， 側面積 $= 3 \times 12 + 4 \times 12 + 5 \times 12 = 144$

したがって，三角柱の表面積 $= 12 + 144$ 　　　$(4 + 5 + 3) \times 12$(展開図から)

$= 156$

（答） $156\ cm^2$

2

(8) 今年の高校野球の入場者数はおよそ 20 万人でした。入場者数は昨年から25 % 増加したと報告されました。昨年の高校野球の入場者数を求めなさい。

【解説】

昨年の入場者数を x 人とすると，

$$x \times (1+0.25) = 200000$$

$$1.25x = 200000$$

$$x = \frac{200000}{1.25} = 160000$$

（答） 16 万人

(9) 直径が 8 cm の円の周の長さを求めなさい。円周率は 3.14 とします。得られた結果は整数になるよう四捨五入しなさい。

【解説】

円周 ＝ 直径 × 円周率

$= 8 \times 3.14$

$= 25.12$

$\fallingdotseq 25$

（答） 25 cm^2

(10) 次の比を小さいものから順に並べなさい。

$4:3$ ， $\frac{6}{11}$ ， $3:5$ ， $\frac{3}{7}$ ， $7:3$

【解説】

小数に直して比べてみましょう。

$$4:3 = \frac{4}{3} = 1.33\cdots = 1.33$$

$$\frac{6}{11} = 0.5454\cdots \fallingdotseq 0.55$$

$$3:5 = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\frac{3}{7} \fallingdotseq 0.43$$

$$7:3 = \frac{7}{3} = 2.33\cdots \fallingdotseq 2.33$$

（答） $\frac{3}{7}$ ， $\frac{6}{11}$ ， $3:5$ ， $4:3$ ， $7:3$

（11）母の年齢は 40 歳です。娘は 10 歳で息子は 8 歳です。
二人の子供の年齢の和が母の年齢に等しくなるのは何年後ですか。

【解説】

x 年後，

$$\begin{cases} \text{母は，} 40 + x \text{ 歳} \\ \text{娘は，} 10 + x \text{ 歳} \\ \text{息子は，} 8 + x \text{ 歳} \end{cases}$$

になります。

二人の子供の年齢の和が，母の年齢に等しくなるとき，

$$(10 + x) + (8 + x) = 40 + x$$

$$2x + 18 = 40 + x$$

$$x = 22$$

（答） 22 年後

（12）ある数を x とおき，次の文章に関する方程式を立てて求めなさい。
ある数を 3 倍し，それから 10 を引くと 14 になる。

【解説】

$3x - 10 = 14$

$3x = 24$

$x = 8$

（答） 式：$3x - 10 = 14$ ， $x = 8$

$\boxed{3}$

（13）次の式を解きなさい。

$$1\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = \frac{5}{24}$$

【解説】

$$1\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = \frac{5}{24}$$

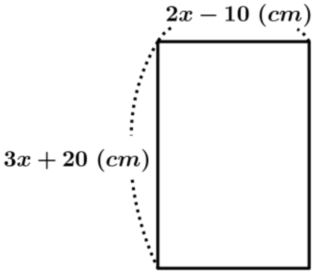
$$1\frac{2}{3}x = \frac{5}{24} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{3}x = \frac{25}{120} - \frac{24}{120}$$

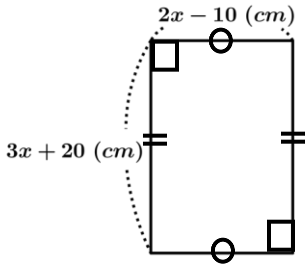
$$\frac{5}{3}x = \frac{1}{120} \qquad x = \frac{1}{120} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{200}$$

（答） $x = \frac{1}{200}$

（14）図に示すような周囲の長さが $220\ cm$ の長方形があります。
x を求めなさい。



【解説】



図形は長方形なので，周囲の長さは，

$2\{(2x-10)+(3x+20)\}$ と表せます。

したがって，

$2\{(2x-10)+(3x+20)\}=220$

$x=20$　（答）$\underline{x=20}$

（15）表に 5 点のデータがあります。

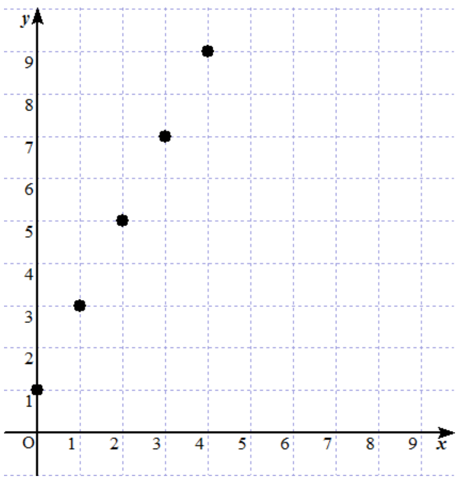
① 表の 5 点のデータを座標平面に書き入れなさい。

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

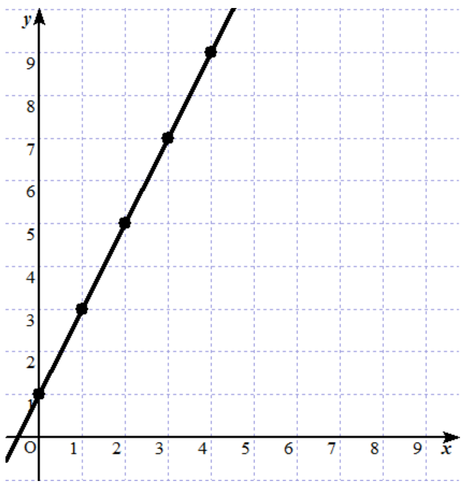
② 表の 5 点をなめらかに接続すると，どのような図が得られますか。

【解説】

（答）①



② $y=2x+1$のグラフが得られます。



4

(16)

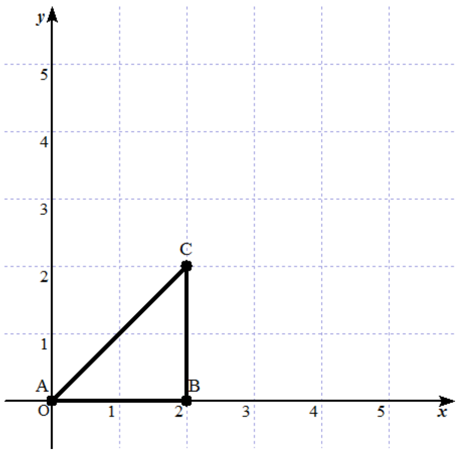
① 頂点が A(0 , 0)，B(2 , 0)，C(2 , 2)の三角形を描きなさい。

② ①の三角形を 2 倍に拡大した三角形 A’ B’ C’を描きなさい。

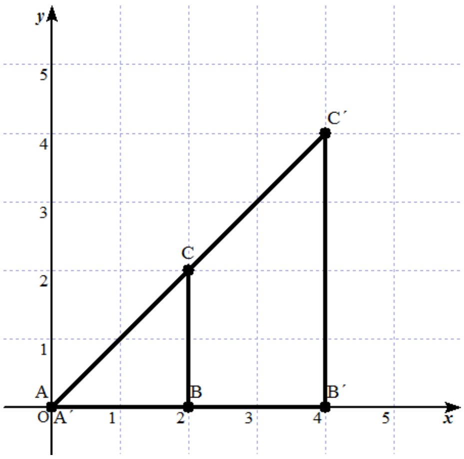
③ 拡大した三角形 A’ B’ C’の面積を求めなさい。　単位：cm

【解説】

(答) ①



②



③ 三角形の面積 ＝ 底面積 × 高さ × $\frac{1}{2}$ で求められます。

したがって，

三角形 A’ B’ C’ の面積 $= 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$　　(答)　$8\ cm^2$

(別解)

三角形 ABC の面積 $= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$

ΔABC と $\Delta A'B'C'$ の相似比は 1 ： 2 より

ΔABC と $\Delta A'B'C'$ の面積比は $1^2 : 2^2 = 1 : 4$

∴ 三角形 ABC の面積 ＝ 三角形 ABC の面積 × 4

$= 2 \times 4$

$= 8$　　(答)　$8\ cm^2$

(17) 与えられた 2 点を通る直線と，その傾きを求めなさい。

(2，－5)，(8，1)

【解説】

2 点が与えられたとき，$y = ax + b$ を求めることができます。

2 点（2，−5），（8，1）を通る直線の傾きは，

$a =$ 変化の割合 $= \dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ より，

$$a = \frac{1-(-5)}{8-2}$$

$a = 1$

したがって，$y = x + b$

この式に，$x = 8$ ，$y = 1$ を代入すると，

$1 = 8 + b$

$b = -7$

$y = x - 7$

(答) 直線の式 $y = x - 7$ ，傾き 1

(別解)

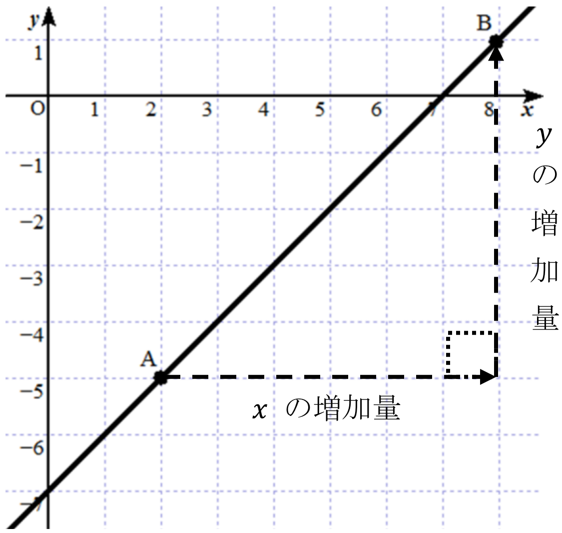
$y = ax + b$ に，$(x, y) = (2, -5)$，$(8, 1)$ を代入すると，

$$\begin{cases} -5 = 2a + b \cdots ① \\ 1 = 8a + b \cdots ② \end{cases}$$

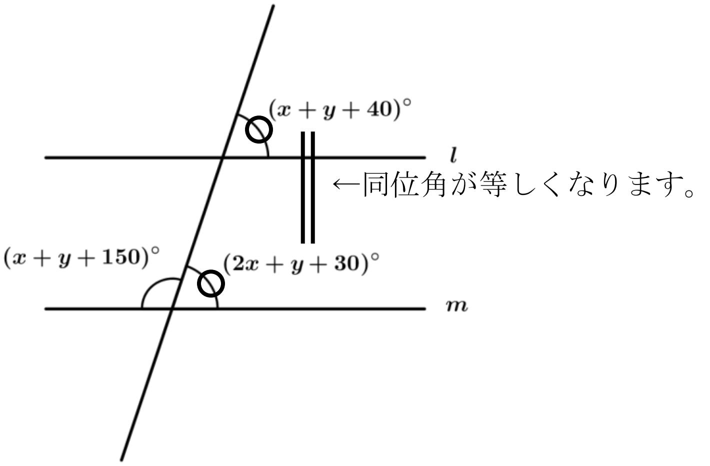
この連立方程式を解くと，$a = 1$，$b = -7$

ゆえに $y = x - 7$

(答) 直線の式 $y = x - 7$ ，傾き 1



（18）直線 l と直線 m を平行にするには，x と y をどのように選べばよいですか。



【解説】

2 直線に 1 つの直線が交わるとき，
2 直線が平行ならば，同位角は等しくなります。
したがって，

$$2x+y+30=x+y+40$$
$$x=10$$

また，直線は180°となるので，

$$(2x+y+30)+(x+y+150)=180$$
$$3x+2y+180=180$$
$$3x+2y=0$$
$x=10$ より
$$30+2y=0$$
$$2y=-30$$
$$y=-15$$

（答）　$x=10$　，　$y=-15$

（19）$a=-5$ のとき，次の式を計算しなさい。
① $\sqrt{1521}-a=$
② $\sqrt{(a-7)^2-23}=$

【解説】

① $\sqrt{1521}=\sqrt{3^2\times 13^2}=\sqrt{39^2}=39$
$\sqrt{1521}-a=39-(-5)$
$=44$

（答）　44

② $\sqrt{(a-7)^2-23}=\sqrt{(-5-7)^2-23}$
$=\sqrt{121}$
$=11$

（答）　11

（20）

① 次の分数を約分しなさい。

$$\frac{3x^3}{20} \times \frac{6z^2}{15} =$$

② 次の式を計算しなさい。

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{7})^2 =$$

【解説】

① $\frac{3x^3}{20} \times \frac{6z^2}{15} = \frac{3x^3z^2}{50}$　　（答）$\frac{3x^3z^2}{50}$

② $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{7})^2 = \left(3+2\sqrt{21}+7\right) + (3-2\sqrt{21}+7)$

$= 20$　　（答）20

（21）次の多項式の積と商を求めなさい。

① $(x^2+2x+7)x^3 =$

② $\frac{21x^3y^4z^2}{7x^2y^2z^2} =$

【解説】

① $(x^2+2x+7)x^3 = x^5+2x^4+7x^3$　　（答）$x^5+2x^4+7x^3$

② $\frac{21x^3y^4z^2}{7x^2y^2z^2} = 3xy^2$　　（答）$3xy^2$

(22)

① グラフと式を対応させなさい。

(a)　$y = 2x + 1$

(b)　$y + 1 = -2x$

(c)　$y = 2x - 2$

② ①のグラフ(b) + グラフ(c) の結果を描きなさい。

【解説】

(答)

① 右図

(b)　$y + 1 = -2x$ は移項して,

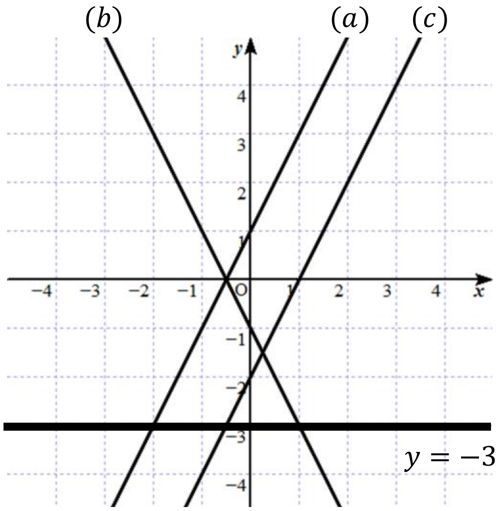
$y = -2x - 1$ として,

$y = ax + b$ の形に直します。

② $(b) + (c)$より

$y = (-2x - 1) + (2x - 2)$

$= -3$



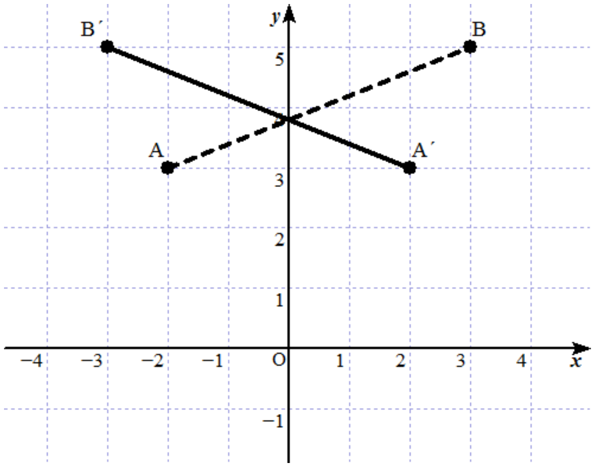
5

(23) A(−2 , 3) , B(3 , 5) の線分 AB があります。
この線分を y 軸に対称に移しました。その図形を描きなさい。

【解説】

(a , b)を y 軸に対称に移動すると，座標は(a , b) → ($-a$, b)となります。

(答)



（24）次の 2 次方程式を解きなさい。

$3x^2 + 12x - 15 = 0$

【解説】

$3x^2 + 12x - 15 = 0$

$3\,(\,x^2 + 4x - 5\,) = 0$

$3(x-1)(x+5) = 0$

$x = -5\,,1$　　　　（答）　$x = -5\,,1$

（25）次の式を因数分解しなさい。

$16 - (x-2)^2 =$

【解説】

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ を利用します。

$16 - (x-2)^2 = \{4 + (x-2)\}\{4 - (x-2)\}$

$= (2+x)(6-x)$　　　（答）　$(2+x)(6-x)$

（26）

① 2 点 A(4，−8)，B(−4，−8)があります。
A , B を座標平面上に描きなさい。

② A , B と原点を通る 2 次式を求めなさい。

【解説】

①　右のグラフの A と B

② 求める 2 次式を $y = ax^2 + bx + c \cdots$(i)とすると，
(i)は原点を通るので，$x = 0\,, y = 0$ を代入し，$c = 0$
したがって，$y = ax^2 + bx \cdots$(ii)
ここで，A , B の座標を(ii)に代入すると

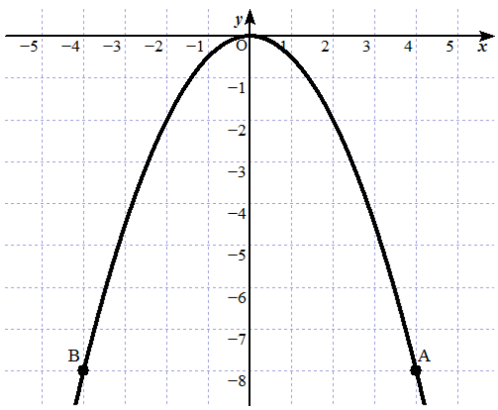
$$\begin{cases} -8 = 16a + 4b \\ -8 = 16a - 4b \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，$a = -\dfrac{1}{2}$，$b = 0$

よって，$y = -\dfrac{1}{2}x^2$ となります。

（答）　$y = -\dfrac{1}{2}x^2$

（答）



（27）10 枚のカードに 1 から 10 までの数字のどれかが書き込まれています。
10 枚のカードからランダムに 1 枚のカードを引いたとき，そのカードが素数である確率を求めなさい。

【解説】

素数は 2，3，5，7 となるので，

求める確率は，$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$　　　　（答）$\frac{2}{5}$

6

（28）以下の関係の定義域と値域を示しなさい。
$(-3, 2), (1, 3), (3, 5), (4, 8)$

【解説】

定義域：$-3, 1, 3, 4$

値域：　$2, 3, 5, 8$

（答）　定義域 $-3，1，3，4$　　値域 $2，3，5，8$

（29）集合　A ＝ {0 とすべての自然数}　集合 B ＝ { −1，0，5，8 }のとき，
次の集合を求めなさい。 ① A ∪ B　 ② A ∩ B

【解説】

① A ∪ B は A または B を表します。　（答）A ∪ B={ −1 と 0 とすべての自然数 }

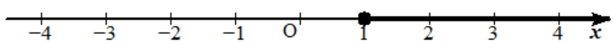
② A ∩ B は A かつ B を表します。　（答）A ∩ B= {0，5，8}

（30）数直線上に不等式の解を示すことができます。$x > k$ あるいは $x < k$の不等式をグラフに表すときは，k点を白丸とし，$x \geq k$ あるいは$x \leq k$のときは k点を黒丸で表すことにします。．
不等式 $x - 3 \geq -2$ を解き，グラフに示しなさい。

【解説】

$x - 3 \geq -2$ ゆえに $x \geq 1$

（答）



（31）① $64^{-\frac{3}{4}}$ と ② $(-27)^{\frac{1}{3}}$ を計算しなさい。

【解説】

① $64^{-\frac{3}{4}} = 2^{6(-\frac{3}{4})} = 2^{-\frac{9}{2}} = \dfrac{1}{16\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{32}$ （答） $\dfrac{\sqrt{2}}{32}$

② $(-27)^{\frac{1}{3}} = (-3)^{3\times\frac{1}{3}} = -3$ （答） -3

（32）次の多項式を因数分解しなさい。

$$14ac - 21ad + 6bc - 9bd =$$

【解説】

$$\begin{aligned} 14ac - 21ad + 6bc - 9bd &= 7a(2c-3d) + 3b(2c-3d) \\ &= (7a+3b)(2c-3d) \end{aligned}$$

（答） $(7a+3b)(2c-3d)$

（33）$x - 2 = \sqrt{x}$ を解きなさい。

【解説】

$x - 2 = \sqrt{x}$ …① の両辺を 2 乗すると,

$(x-2)^2 = (\sqrt{x})^2$

$x^2 - 4x + 4 = x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1, 4$

これらの解が①を満たすかどうか調べると,

$x = 1$ のとき，$1 - 2 = \sqrt{1}$

$-1 = 1$ となり不適。

$x = 4$ のとき，$4 - 2 = \sqrt{4}$

$2 = 2$ となり①を満たします。

したがって， $x = 4$ （答） $x = 4$

（補足）
なぜこのような確かめが必要なのかを考えてみましょう。
仮に問題が,

$x-2=-\sqrt{x}\cdots$①′

だったらどうなるでしょうか。
根号をはずすために，両辺を 2 乗すると,

$(x-2)^2=(-\sqrt{x})^2$

$x^2-4x+4=x$

となり，上述の結果と同じなので，解は

$x=1,4$ と求められます。

$x=1$ を①′の式に代入すると,

$1-2=-\sqrt{1}$

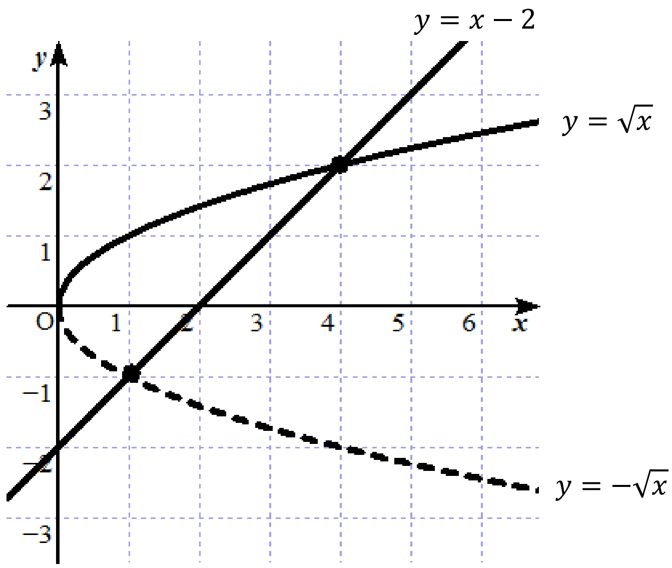
$-1=-1$ となり①′ を満たします。

$x=4$ を①′の式に代入すると,

$4-2=-\sqrt{4}$

$2=-2$ となり①′を満たしません。

このように，2 乗したことにより本来の式とは異なる式を含むことになりますから，
得られた結果を確認する必要があるのです。
参考として，$y=x-2$ ，$y=\sqrt{x}$ ，$y=-\sqrt{x}$ を示したグラフを付け加えておきます。
グラフの交点が解となります。



(34) 図形の各点 (x,y) の移動を座標記号で次のように表します。

$(x,y)\to(x+a\,,y+b)$ ただし，a は水平方向の移動の大きさ，b は垂直方向の移動の大きさを表しています。 $y=2x^2-3x+1$ があります。y に上で述べたような移動を行った結果，$y=2x^2+x+2$ となりました。移動した大きさ a ，b を求めなさい。

【解説】

移動した大きさを a，b とすると，

平行移動した後の式は，

$y-b=2(x-a)^2-3(x-a)+1$

$y-b=2(x^2-2ax+a^2)-3(x-a)+1$

$y-b=2x^2-4ax+2a^2-3x+3a+1$

$y=2x^2+(-4a-3)x+2a^2+3a+1+b$ となります。

この式が，題意より $y=2x^2+x+2$ と等しいので，

係数比較することにより，

$$\begin{cases}-4a-3=1\cdots①\\2a^2+3a+1+b=2\cdots②\end{cases}$$

①より，$a=-1$

これを②に代入して，$b=2$　　　　(答)　$a=-1\,,b=2$

(別解)

$y=2x^2-3x+1$

$=2(x-\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}$ より，

頂点の座標は，$(\frac{3}{4}\,,-\frac{1}{8})$

$y=2x^2+x+2$

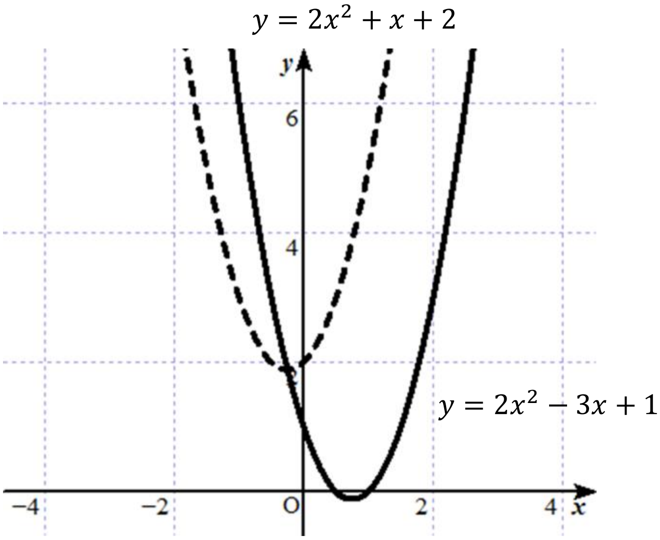
$=2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{8}$ より，

頂点の座標は，$(-\frac{1}{4}\,,\frac{15}{8})$

したがって，

$a=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$

$b=\frac{15}{8}-(-\frac{1}{8})=2$　　　　(答)　$a=-1\,,b=2$



（35）次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} xy = 3 \\ 2y - 3x - 3 = 0 \end{cases}$$

【解説】

未知数が 2 つあるので，未知数が 1 つになるように代入して，
それについて解くことで残りの未知数も解きます。

$$\begin{cases} xy = 3 \cdots ① \\ 2y - 3x - 3 = 0 \cdots ② \end{cases}$$

②より $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

この式を①に代入すると，

$$x \times \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 3$$

$$3x^2 + 3x = 6$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2, 1$$

$x = -2$ を①に代入すると，

$y = -\frac{3}{2}$

$x = 1$ を①に代入すると，

$y = 3$

（答）$\begin{cases} x = -2, y = -\frac{3}{2} \\ x = 1, y = 3 \end{cases}$

（36）

① 2 進数 $1110101_{(2)}$ を 10 進数へ変えなさい。

② 2 進数 $1110101_{(2)}$ を 3 進数へ変えなさい。

【解説】

2 進数は 2 のべき乗の和で表したときの係数 1 か 0 を上位から順番に並べたものです。

① $1\,1\,1\,0\,1\,0\,1_{(2)}$ は，

$\underline{1} \times 2^6 + \underline{1} \times 2^5 + \underline{1} \times 2^4 + \underline{0} \times 2^3 + \underline{1} \times 2^2 + \underline{0} \times 2^1 + \underline{1} \times 2^0$(= 10 進数の 117)

の係数（これを桁係数と呼びます）を上位から順番に並べた 1 1 1 0 1 0 1 です。

したがって，$1\,1\,1\,0\,1\,0\,1_{(2)}$ は 10 進数で表すと，$117_{(10)}$です。 （答） $117_{(10)}$

② $1\,1\,1\,0\,1\,0\,1_{(2)}$は①で求めたように 117 です。これを利用して 3 のべき乗の和の形で表します。117 を商が 0 になるまで 3 で割り続けて商と余りを求め，余りを下から上へ順番に並べれば 117 を 3 進数に変換した数字が得られます。

	商	余り
3)	117	
3)	39	0
3)	13	0
3)	4	1
3)	1	1
	0	1

10 進数を n のべき乗で表す方法として，
左に示すような割り算を連続して行う方法が
一般的に使われます。

$117_{(10)} = 1\,1\,1\,0\,0_{(3)}$ （答） $1\,1\,1\,0\,0_{(3)}$

（補足）

上で示した計算により 3 のべき乗が得られることを確認しておきましょう。

$$
\begin{aligned}
117 &= 3\ \times 39\\
&= 3\ \times (3 \times 13)\\
&= 3\ \times (3 \times (3 \times 4 + 1))\\
&= 3\ \times (3 \times (3 \times (3 \times 1 + 1) + 1))\\
&= 3\ \times (3 \times (3^2 + 3 + 1))\\
&= 3\ \times (3^3 + 3^2 + 3)\\
&= 3^4 + 3^3 + 3^2
\end{aligned}
$$

これより，

$1\,1\,1\,0\,1\,0\,1_{(2)} = 117 = \underline{1} \times 3^4 + \underline{1} \times 3^3 + \underline{1} \times 3^2 + \underline{0} \times 3^1 + \underline{0} \times 3^0$

アンダーラインで示した 3 のべき乗の係数を上から順に並べたもの

$1\,1\,1\,0\,0_{(3)}$ が 3 進数になります。3^1 と 3^0 の係数が 0 ですから,

それを忘れないように注意しましょう。

(37) $tan\theta = -\dfrac{5}{2}$ が与えられています。 $sin\theta$ ， $cos\theta$ を求めなさい。

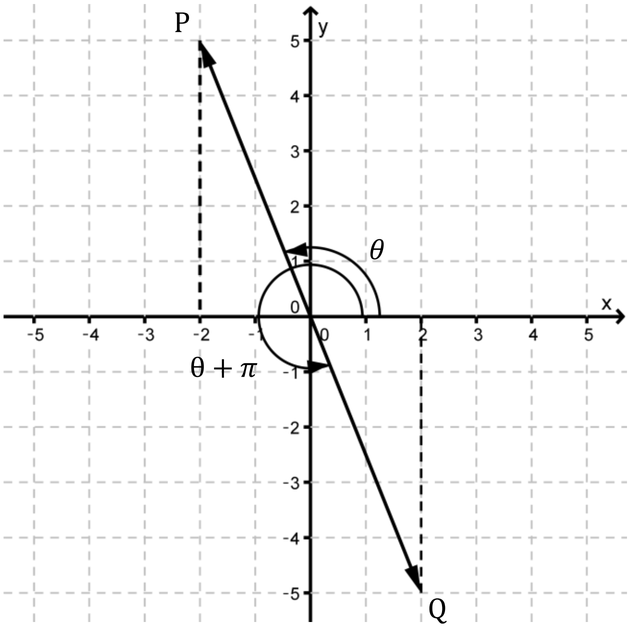
ただし，θ の範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とします。

【解説】

$tan\,\theta = -\dfrac{5}{2}$ を下のグラフで説明します。

$tan\,\theta = -\dfrac{5}{2}$ は，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で直線 OP，直線 OQ で作られる角 θと$\theta + \pi$ に対する tan です。

$-\dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{-2} = \dfrac{-5}{2}$ ですから，2 つの場合について $sin\,\theta$ ，$cos\theta$ を求めます。



(i) $tan\,\theta = \dfrac{5}{-2}$ のとき，

$$sin\,\theta = \frac{5}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$ 同様に $$cos\,\theta = \frac{-2}{\sqrt{29}} = \frac{-2\sqrt{29}}{29}$$

(ii) $tan\,\theta = \dfrac{-5}{2}$ のとき，

$$sin\,\theta = \frac{-5}{\sqrt{29}} = \frac{-5\sqrt{29}}{29}$$ 同様に $$cos\,\theta = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

（答） $sin\,\theta = \dfrac{5\sqrt{29}}{29}$ $cos\,\theta = \dfrac{-2\sqrt{29}}{29}$ ， $sin\,\theta = \dfrac{-5\sqrt{29}}{29}$ $cos\,\theta = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$

(38) 次のテーブルは，あるクラスの学生の身長を示しています。
このデータの平均値，メディアン，モードを求めなさい。

身長	147	148	149	149	150	155	160	170

【解説】

$$平均 = \frac{147+148+149+149+150+155+160+170}{8} = 153.5$$

メディアンは，データの個数が偶数の場合は中央にデータが無いため，
中央の左右のデータの和の平均をとります。

したがって，$\frac{149+150}{2} = 149.5$

モードは，もっとも頻繁に出現する値で 149
となります。

(答) 平均： 153.5
メディアン： 149.5
モード： 149

(39) 次の式を有理化しなさい。

① $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$

② $\frac{1}{\sqrt{4y+x-4\sqrt{xy}}} =$

$(4y > x)$

【解説】

① $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$　(答) $\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

② $\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}\ (a > b)$ を使うと，

$\frac{1}{\sqrt{4y+x-4\sqrt{xy}}} = \frac{1}{\sqrt{4y}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{4y}+\sqrt{x}}{(\sqrt{4y}-\sqrt{x})(\sqrt{4y}+\sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{y}+\sqrt{x}}{4y-x}$　(答) $\frac{2\sqrt{y}+\sqrt{x}}{4y-x}$

（40） 次の 2 次式の解の差が 6 のとき，定数 m を求めなさい。

$$4x^2-(m+2)x-8(m-2)=0$$

ただし，m は $0<m<10$ とします。

【解説】

$4x^2-(m+2)x-8(m-2)=0\ \ (0<m<10)$

の 2 つの解を α, $\beta\ (\alpha>\beta)$ とすると，

解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{m+2}{4}\ \cdots①\\ \alpha\beta=-2(m-2)\ \cdots②\end{cases}$$

また，題意より

$\alpha-\beta=6$

$\beta=\alpha-6\cdots③$

これを①に代入して，

$m=4\alpha+4\beta-2$

$=4\alpha+4(\alpha-6)-2$

$=8\alpha-26\cdots④$

③④を②に代入して，

$\alpha(\alpha-6)=-2\{(8\alpha-26)-2\}$

$\alpha^2-6\alpha=-16\alpha+56$

$\alpha^2+10\alpha-56=0$

$(\alpha-4)(\alpha+14)=0$

$\alpha=-14, 4$

$\alpha=-14$ を④に代入すると，$m=-138$ となり不適(なぜなら $0<m<10$)。

$\alpha=4$ を④に代入すると，$m=6$となります。 （答） $m=6$

※解と係数の関係

$ax^2+bx+c=0$

が 2 つの解 α, β をもつとき,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

が成り立ちます。