Fixpunkte: Eine fixe Idee in der Mathematik

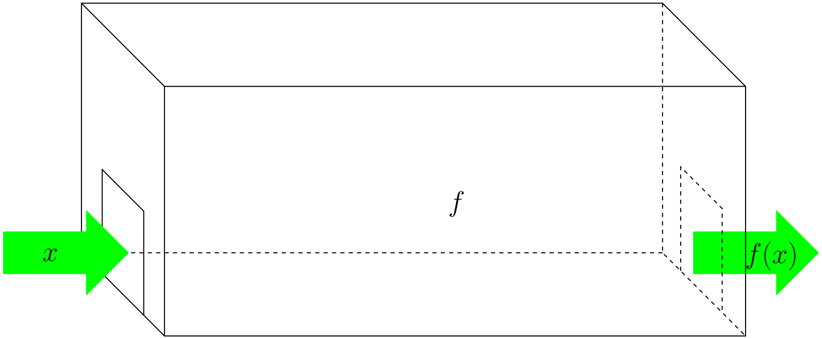
Gunter Fuchs
Lange Nacht der Mathematik, Münster

30. Mai 2008

Funktionen

Definition

Wenn X und Y Mengen sind, dann ist eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ von X nach Y eine Zuordnung von Elementen von X zu Elementen von Y, so dass jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet wird. Für dieses y wird $f(x)$ geschrieben.



x
f
$f(x)$

Ein Spezialfall

$$f : X \longrightarrow X$$

Also nicht so...

Sondern so...

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x$$

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x)$$

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x))$$

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x)) \mapsto_f f(f(f(x)))$$

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x)) \mapsto_f f(f(f(x))) \mapsto_f \cdots$$

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x)) \mapsto_f f(f(f(x))) \mapsto_f \cdots$$

Diese Möglichkeit übt eine geradezu unwiderstehliche Anziehungskraft auf Mathematiker aus!

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x)) \mapsto_f f(f(f(x))) \mapsto_f \cdots$$

Diese Möglichkeit übt eine geradezu unwiderstehliche Anziehungskraft auf Mathematiker aus!
Man kann einfach nicht damit aufhören...

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x)) \mapsto_f f(f(f(x))) \mapsto_f \cdots$$

Diese Möglichkeit übt eine geradezu unwiderstehliche Anziehungskraft auf Mathematiker aus!
Man kann einfach nicht damit aufhören...
Man kann einfach nicht damit aufhören...

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x)) \mapsto_f f(f(f(x))) \mapsto_f \cdots$$

Diese Möglichkeit übt eine geradezu unwiderstehliche Anziehungskraft auf Mathematiker aus!
Man kann einfach nicht damit aufhören...
Man kann einfach nicht damit aufhören...
Man kann einfach nicht damit aufhören...

Das besondere an einer Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist:
Man kann die Funktion wieder auf den Funktionswert anwenden.
Und hier muss man nicht aufhören:

$$x \mapsto_f f(x) \mapsto_f f(f(x)) \mapsto_f f(f(f(x))) \mapsto_f \cdots$$

Diese Möglichkeit übt eine geradezu unwiderstehliche Anziehungskraft auf Mathematiker aus!
Man kann einfach nicht damit aufhören...
Man kann einfach nicht damit aufhören...
Man kann einfach nicht damit aufhören...
...

Nicht nur Mathematiker...

Die Bildung von Folgen durch iterierte Anwendung einer Funktion liefert oft interessante Ergebnisse:

Fixpunkte

Fixpunkte

Wenn man zurzeit den Begriff *Fixpunkt* mit google sucht, dann führt einen der “Top Hit” auf eine Seite, die wenig mit dem zu tun hat, worum es mir hier geht...

„Fixpunkt“
steht für

Entwicklung und Umsetzung
innovativer Ideen

in der

Gesundheitsförderung
und
Tagesstruktur, Beschäftigung
und Qualifizierung

für illegal Drogengebrauchende in
Berlin

Definition

Sei $f : X \longrightarrow X$ eine Funktion. $x \in X$ ist ein Fixpunkt von f,

wenn gilt:

$$f(x) = x.$$

Erreichen eines Fixpunkts durch iterierte Funktionsanwendung

Erreichen eines Fixpunkts durch iterierte Funktionsanwendung

Erreichen eines Fixpunkts durch iterierte Funktionsanwendung

Erreichen eines Fixpunkts durch iterierte Funktionsanwendung

Erreichen eines Fixpunkts durch iterierte Funktionsanwendung

Beispiele aus der Mathematik

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist *kontrahierend*, wenn es eine Zahl c mit $0 \leq c < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Definition

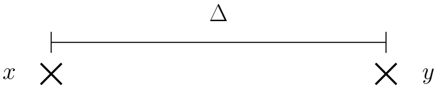
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist *kontrahierend*, wenn es eine Zahl c mit $0 \leq c < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist *kontrahierend*, wenn es eine Zahl c mit $0 \leq c < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

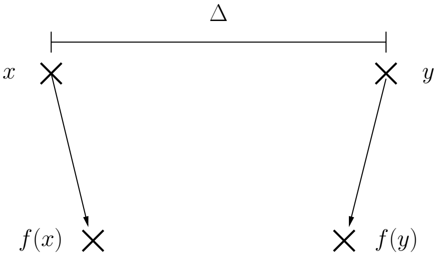
$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$



Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist *kontrahierend*, wenn es eine Zahl c mit $0 \leq c < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

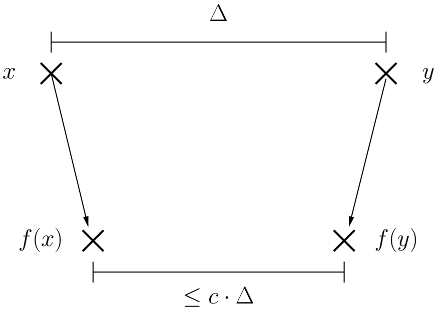
$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$



Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow X$ ist *kontrahierend*, wenn es eine Zahl c mit $0 \leq c < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$



Satz (Stefan Banach, 1922)

Sei (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : X \longrightarrow X$ *eine kontrahierende Funktion. Dann hat* f *genau einen Fixpunkt.*

Satz (Stefan Banach, 1922)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \longrightarrow X$ eine kontrahierende Funktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

Beweis: Angenommen, es gäbe zwei Fixpunkte.

Satz (Stefan Banach, 1922)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \longrightarrow X$ eine kontrahierende Funktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

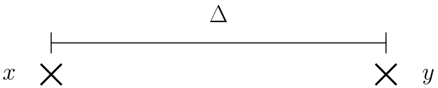
Beweis: Angenommen, es gäbe zwei Fixpunkte.

$x \times \qquad\qquad\qquad \times y$

Satz (Stefan Banach, 1922)

Sei (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : X \longrightarrow X$ *eine kontrahierende Funktion. Dann hat* f *genau einen Fixpunkt.*

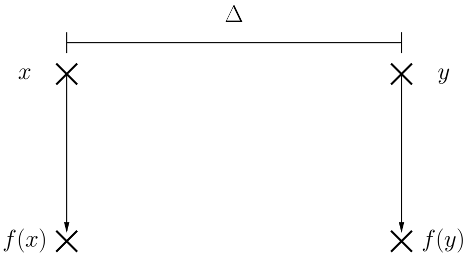
Beweis: Angenommen, es gäbe zwei Fixpunkte.



Satz (Stefan Banach, 1922)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \longrightarrow X$ eine kontrahierende Funktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

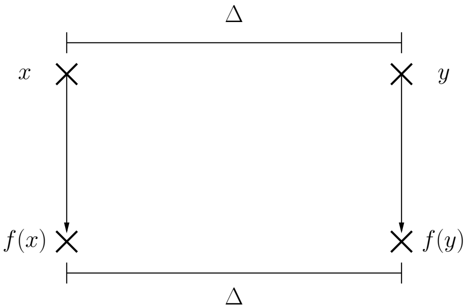
Beweis: Angenommen, es gäbe zwei Fixpunkte.



Satz (Stefan Banach, 1922)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \longrightarrow X$ eine kontrahierende Funktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

Beweis: Angenommen, es gäbe zwei Fixpunkte.



Ich will versuchen, den Existenzbeweis zu visualisieren...

Ich will versuchen, den Existenzbeweis zu visualisieren...
Unser metrischer Raum sei jetzt der Bildschirm.

Ich will versuchen, den Existenzbeweis zu visualisieren...
Unser metrischer Raum sei jetzt der Bildschirm.
Wenn man eine Kamera auf den Bildschirm richtet und sich das Bild auf dem Bildschirm anzeigen lässt, dann erhält man eine Kontraktion:

Ich will versuchen, den Existenzbeweis zu visualisieren...
Unser metrischer Raum sei jetzt der Bildschirm.
Wenn man eine Kamera auf den Bildschirm richtet und sich das Bild auf dem Bildschirm anzeigen lässt, dann erhält man eine Kontraktion:
Die Funktion, die einem Pixel sein Bild-Pixel zuordnet.

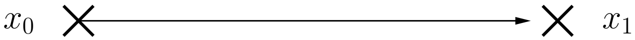
X

Etwas formaler

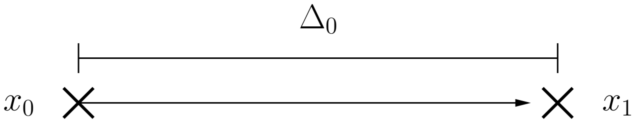
Etwas formaler

$x_0 \quad \times$

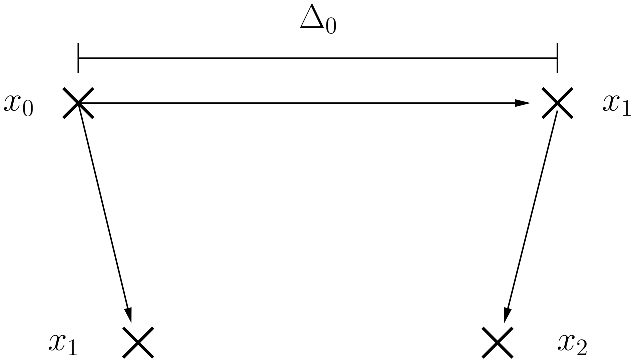
Etwas formaler



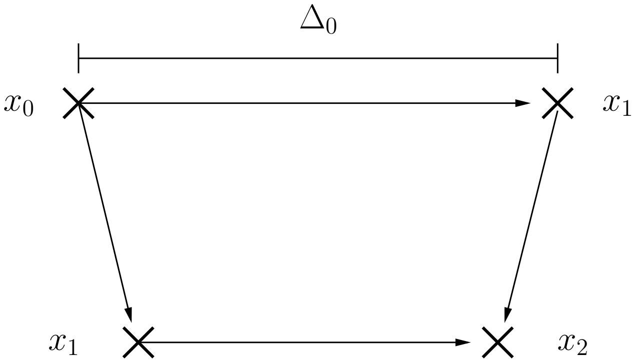
Etwas formaler



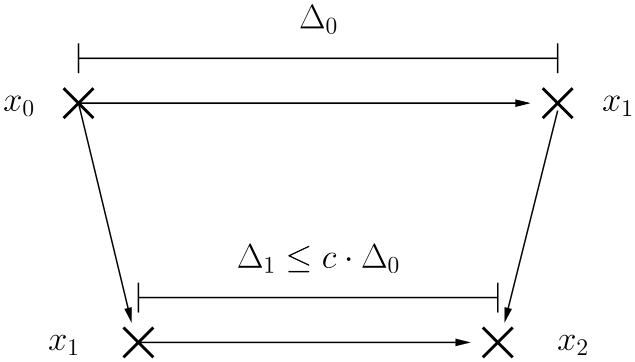
Etwas formaler



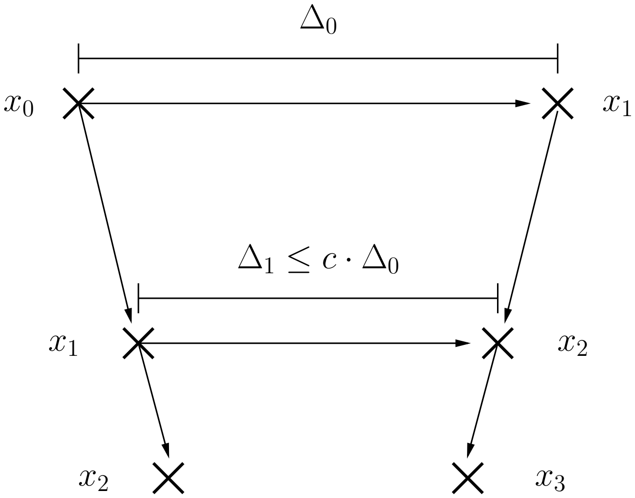
Etwas formaler



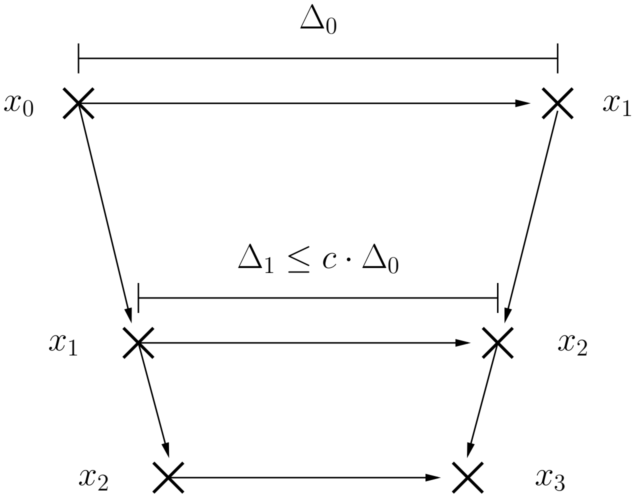
Etwas formaler



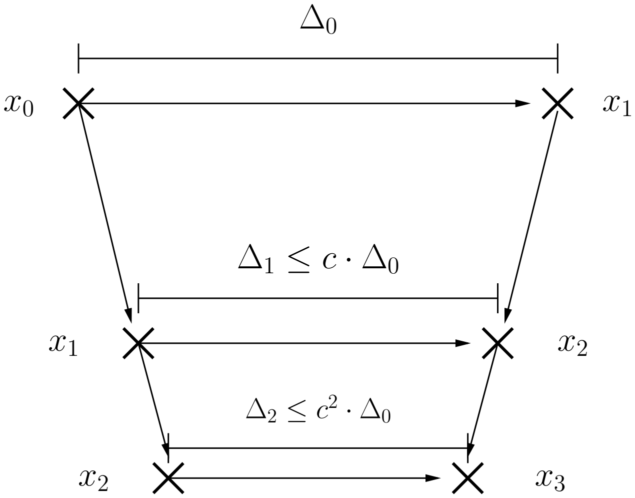
Etwas formaler



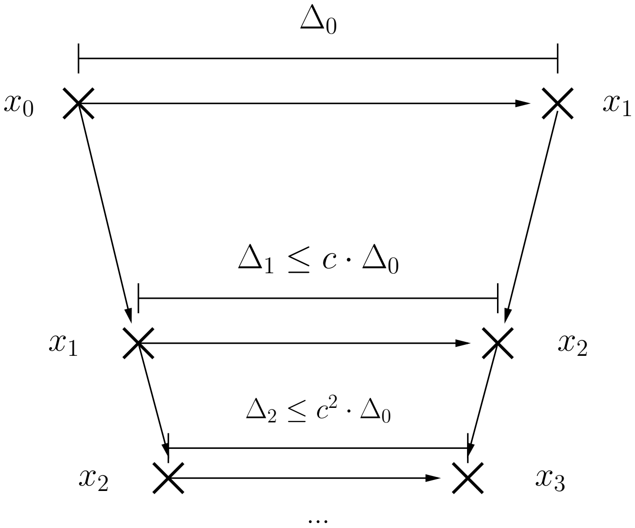
Etwas formaler



Etwas formaler



Etwas formaler



Eine Anwendung

Eine Anwendung

Satz (Picard-Lindelöf)

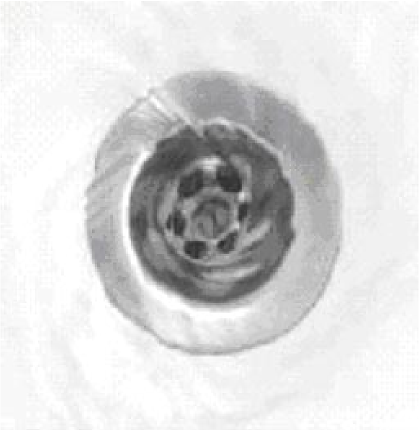
Wenn f ein Lipschitz-stetiges, zeitabhängiges Vektorfeld ist, dann hat die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ x'(t) &= f(t, x(t)) \end{aligned}$$

eindeutige lokale Lösungen.

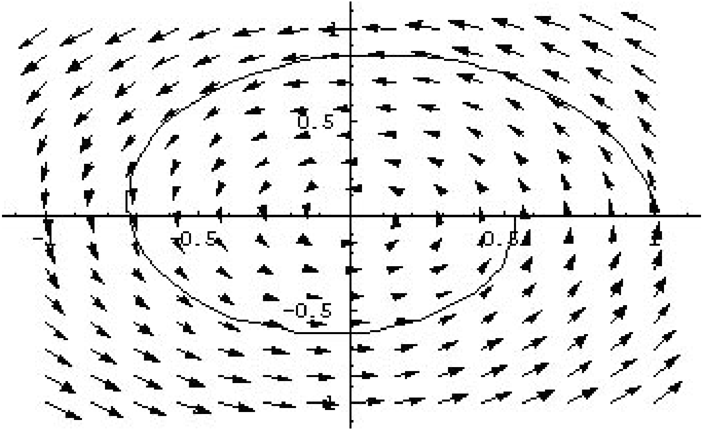
Vektorfelder

Vektorfelder



Vektorfelder

Vektorfelder



Beweis:

Beweis: x ist eine Lösung für die Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

Beweis: x ist eine Lösung für die Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

für alle t in einer Umgebung von t_0.

Beweis: x ist eine Lösung für die Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

für alle t in einer Umgebung von t_0.
Wenn u_0 eine beliebige stetige Funktion ist, die auf dieser Umgebung definiert ist, dann kann man eine neue Funktion $u_1 := F(u_0)$ definieren durch die rechte Seite der obigen Gleichung:

Beweis: x ist eine Lösung für die Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

für alle t in einer Umgebung von t_0.
Wenn u_0 eine beliebige stetige Funktion ist, die auf dieser Umgebung definiert ist, dann kann man eine neue Funktion $u_1 := F(u_0)$ definieren durch die rechte Seite der obigen Gleichung:

$$u_1(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s))ds.$$

Beweis: x ist eine Lösung für die Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

für alle t in einer Umgebung von t_0.
Wenn u_0 eine beliebige stetige Funktion ist, die auf dieser Umgebung definiert ist, dann kann man eine neue Funktion $u_1 := F(u_0)$ definieren durch die rechte Seite der obigen Gleichung:

$$u_1(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s))ds.$$

Dann ist x genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn x ein Fixpunkt von F ist!

Beweis: x ist eine Lösung für die Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

für alle t in einer Umgebung von t_0.
Wenn u_0 eine beliebige stetige Funktion ist, die auf dieser Umgebung definiert ist, dann kann man eine neue Funktion $u_1 := F(u_0)$ definieren durch die rechte Seite der obigen Gleichung:

$$u_1(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s))ds.$$

Dann ist x genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn x ein Fixpunkt von F ist! Die Voraussetzungen garantieren gerade, dass der Raum der stetigen Funktionen auf einer (hinreichend kleinen) Umgebung U ein vollständiger metrischer Raum ist, und dass F eine Kontraktion ist.

Beweis: x ist eine Lösung für die Differentialgleichung genau dann, wenn gilt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

für alle t in einer Umgebung von t_0.
Wenn u_0 eine beliebige stetige Funktion ist, die auf dieser Umgebung definiert ist, dann kann man eine neue Funktion $u_1 := F(u_0)$ definieren durch die rechte Seite der obigen Gleichung:

$$u_1(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s))ds.$$

Dann ist x genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn x ein Fixpunkt von F ist! Die Voraussetzungen garantieren gerade, dass der Raum der stetigen Funktionen auf einer (hinreichend kleinen) Umgebung U ein vollständiger metrischer Raum ist, und dass F eine Kontraktion ist. Also existiert ein eindeutig bestimmter Fixpunkt von F. $\square$

Rückblick

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:
Gegeben ist $f : X \longrightarrow X$.

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:
Gegeben ist $f : X \longrightarrow X$.
Starte mit $x_0 \in X$. Setze $x_1 = f(x_0)$. Wenn $x_1 = x_0$ ist, dann ist x_0 ein Fixpunkt. Wenn nicht:

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:
Gegeben ist $f : X \longrightarrow X$.
Starte mit $x_0 \in X$. Setze $x_1 = f(x_0)$. Wenn $x_1 = x_0$ ist, dann ist x_0 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_2 = f(x_1)$. Wenn $x_2 = x_1$ ist, dann ist x_1 ein Fixpunkt. Wenn nicht:

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:
Gegeben ist $f : X \longrightarrow X$.
Starte mit $x_0 \in X$. Setze $x_1 = f(x_0)$. Wenn $x_1 = x_0$ ist, dann ist x_0 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_2 = f(x_1)$. Wenn $x_2 = x_1$ ist, dann ist x_1 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_3 = f(x_2)$. Wenn $x_3 = x_2$ ist, ist dann ist x_2 ein Fixpunkt. Wenn nicht:

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:
Gegeben ist $f : X \longrightarrow X$.
Starte mit $x_0 \in X$. Setze $x_1 = f(x_0)$. Wenn $x_1 = x_0$ ist, dann ist x_0 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_2 = f(x_1)$. Wenn $x_2 = x_1$ ist, dann ist x_1 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_3 = f(x_2)$. Wenn $x_3 = x_2$ ist, ist dann ist x_2 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
...
So wird eine unendliche Folge $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Jetzt wird ein Limesprozess auf diese Folge angewandt.

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:
Gegeben ist $f : X \longrightarrow X$.
Starte mit $x_0 \in X$. Setze $x_1 = f(x_0)$. Wenn $x_1 = x_0$ ist, dann ist x_0 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_2 = f(x_1)$. Wenn $x_2 = x_1$ ist, dann ist x_1 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_3 = f(x_2)$. Wenn $x_3 = x_2$ ist, ist dann ist x_2 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
...
So wird eine unendliche Folge $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Jetzt wird ein Limesprozess auf diese Folge angewandt.
Im Falle des Banachschen Fixpunktsatzes:

$$x_\omega := \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n.$$

Rückblick

Die Methode zum Auffinden eines Fixpunkts sah bisher so aus:
Gegeben ist $f : X \longrightarrow X$.
Starte mit $x_0 \in X$. Setze $x_1 = f(x_0)$. Wenn $x_1 = x_0$ ist, dann ist x_0 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_2 = f(x_1)$. Wenn $x_2 = x_1$ ist, dann ist x_1 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
Nicht aufgeben! Setze $x_3 = f(x_2)$. Wenn $x_3 = x_2$ ist, ist dann ist x_2 ein Fixpunkt. Wenn nicht:
...
So wird eine unendliche Folge $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Jetzt wird ein Limesprozess auf diese Folge angewandt.
Im Falle des Banachschen Fixpunktsatzes:

$$x_\omega := \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n.$$

Bisher hatten wir Glück: $f(x_\omega) = x_\omega$, das heisst, spätestens im Schritt ω ist ein Fixpunkt gefunden.

Im Allgemeinen kann die Suche aber weiter gehen:

Im Allgemeinen kann die Suche aber weiter gehen:
Nicht aufgeben!

WARNUNG

WARNUNG

Dies ist kein universelles Beweisverfahren.

WARNUNG

Dies ist kein universelles Beweisverfahren.

Theorem (Leo Brouwer)

Jede stetige Funktion von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.

WARNUNG

Dies ist kein universelles Beweisverfahren.

Theorem (Leo Brouwer)

Jede stetige Funktion von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.

Der Beweis ist vollkommen unkonstruktiv.

WARNUNG

Dies ist kein universelles Beweisverfahren.

Theorem (Leo Brouwer)

Jede stetige Funktion von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.

Der Beweis ist vollkommen unkonstruktiv.
Brouwer selbst war wohl am wenigsten mit diesem Theorem zufrieden.

WARNUNG

Dies ist kein universelles Beweisverfahren.

Theorem (Leo Brouwer)

Jede stetige Funktion von der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich selbst hat einen Fixpunkt.

Der Beweis ist vollkommen unkonstruktiv.
Brouwer selbst war wohl am wenigsten mit diesem Theorem zufrieden.
Er war Konstruktivist.

Definition

Ein offenes Intervall von reellen Zahlen ist eine Menge der Form

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

wobei $a < b$ reelle Zahlen sind.

Definition

Sei A eine Menge von reellen Zahlen.

Definition

Sei A eine Menge von reellen Zahlen.
Eine reelle Zahl x ist ein Limespunkt von A, wenn jedes offene Intervall, das x enthält, A schneidet.

Definition

Sei A eine Menge von reellen Zahlen.
Eine reelle Zahl x ist ein Limespunkt von A, wenn jedes offene Intervall, das x enthält, A schneidet.

Definition

Sei A eine Menge von reellen Zahlen.
Eine reelle Zahl x ist ein Limespunkt von A, wenn jedes offene Intervall, das x enthält, A schneidet.
A ist abgeschlossen, wenn A alle seine Limespunkte enthält.

Definition

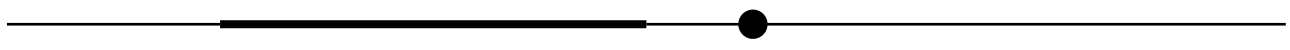
Sei A eine Menge von reellen Zahlen.
Eine reelle Zahl x ist ein Limespunkt von A, wenn jedes offene Intervall, das x enthält, A schneidet.
A ist abgeschlossen, wenn A alle seine Limespunkte enthält.

Definition

$x \in A \subseteq \mathbb{R}$ ist ein isolierter Punkt von A, wenn x kein Limespunkt von A ist.

Definition

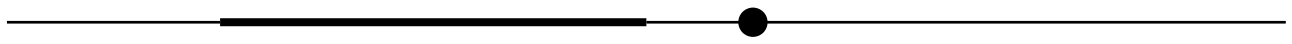
$x \in A \subseteq \mathbb{R}$ ist ein isolierter Punkt von A, wenn x kein Limespunkt von A ist.



Definition

$x \in A \subseteq \mathbb{R}$ ist ein isolierter Punkt von A, wenn x kein Limespunkt von A ist.

A ist perfekt, wenn A abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte hat.



Definition

$x \in A \subseteq \mathbb{R}$ ist ein isolierter Punkt von A, wenn x kein Limespunkt von A ist.
A ist perfekt, wenn A abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte hat.

Theorem (Cantor-Bendixson)

Jede überabzählbare, abgeschlossene Menge ist die disjunkte Vereinigung einer perfekten Menge P und einer abzählbaren Menge S.

Theorem (Cantor-Bendixson)

Jede überabzählbare, abgeschlossene Menge ist die disjunkte Vereinigung einer perfekten Menge P und einer abzählbaren Menge S.

Beweis: Für eine beliebige Menge A von reellen Zahlen sei $\lim(A)$ die Menge der Limespunkte von A.

Theorem (Cantor-Bendixson)

Jede überabzählbare, abgeschlossene Menge ist die disjunkte Vereinigung einer perfekten Menge P und einer abzählbaren Menge S.

Beweis: Für eine beliebige Menge A von reellen Zahlen sei $\lim(A)$ die Menge der Limespunkte von A.
Per Definition ist A genau dann abgeschlossen, wenn $\lim(A) \subseteq A$ ist.

Theorem (Cantor-Bendixson)

Jede überabzählbare, abgeschlossene Menge ist die disjunkte Vereinigung einer perfekten Menge P und einer abzählbaren Menge S.

Beweis: Für eine beliebige Menge A von reellen Zahlen sei $\lim(A)$ die Menge der Limespunkte von A.
Per Definition ist A genau dann abgeschlossen, wenn $\lim(A) \subseteq A$ ist.
Außerdem ist A genau dann perfekt, wenn $A = \lim(A)$ gilt, das heisst, wenn A ein Fixpunkt der Funktion

$$\lim : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ist!

Sei jetzt eine abgeschlossene Menge A gegeben.

Sei jetzt eine abgeschlossene Menge A gegeben.
Wir wollen eine maximale Teilmenge von A konstruieren, die ein Fixpunkt der Funktion lim ist.
Setze: $A_0 = A$. Wenn A_0 ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:

Sei jetzt eine abgeschlossene Menge A gegeben.
Wir wollen eine maximale Teilmenge von A konstruieren, die ein Fixpunkt der Funktion lim ist.
Setze: $A_0 = A$. Wenn A_0 ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:
Setze: $A_1 = \lim(A_0)$. Wenn A_1 ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:

Sei jetzt eine abgeschlossene Menge A gegeben.
Wir wollen eine maximale Teilmenge von A konstruieren, die ein Fixpunkt der Funktion lim ist.
Setze: $A_0 = A$. Wenn A_0 ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:
Setze: $A_1 = \lim(A_0)$. Wenn A_1 ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:
$\ldots$
Setze: $A_{n+1} = \lim(A_n)$. Wenn A_{n+1} ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:

Sei jetzt eine abgeschlossene Menge A gegeben.
Wir wollen eine maximale Teilmenge von A konstruieren, die ein Fixpunkt der Funktion lim ist.
Setze: $A_0 = A$. Wenn A_0 ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:
Setze: $A_1 = \lim(A_0)$. Wenn A_1 ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:

...

Setze: $A_{n+1} = \lim(A_n)$. Wenn A_{n+1} ein Fixpunkt von lim ist, dann sind wir fertig. Ansonsten:

...

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0$$

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1$$

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2$$

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \ldots$$

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \dots$$

Es ist naheliegend, das nächste Folgenglied zu definieren durch:

$$A_\omega := \bigcap_{n<\omega} A_n.$$

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \dots$$

Es ist naheliegend, das nächste Folgenglied zu definieren durch:

$$A_\omega := \bigcap_{n<\omega} A_n.$$

A_ω ist dann die maximale Menge, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Ausserdem ist A_ω abgeschlossen:

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \dots$$

Es ist naheliegend, das nächste Folgenglied zu definieren durch:

$$A_\omega := \bigcap_{n<\omega} A_n.$$

A_ω ist dann die maximale Menge, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Ausserdem ist A_ω abgeschlossen:
Wenn x ein Limespunkt von A_ω ist, dann ist x ein Limespunkt von jedem A_n.

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \dots$$

Es ist naheliegend, das nächste Folgenglied zu definieren durch:

$$A_\omega := \bigcap_{n<\omega} A_n.$$

A_ω ist dann die maximale Menge, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Ausserdem ist A_ω abgeschlossen:
Wenn x ein Limespunkt von A_ω ist, dann ist x ein Limespunkt von jedem A_n.Da jedes A_n abgeschlossen ist, ist also $x \in A_n$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wenn keines der A_n ein Fixpunkt von lim ist, dann haben wir eine absteigende Folge $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ produziert. Wir brauchen einen Limesprozess, um die Konstruktion fortzusetzen.
Jedes der A_n ist abgeschlossen, und es gilt:

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \ldots$$

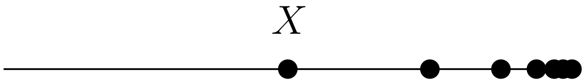
Es ist naheliegend, das nächste Folgenglied zu definieren durch:

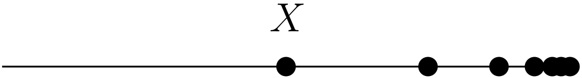
$$A_\omega := \bigcap_{n<\omega} A_n.$$

A_ω ist dann die maximale Menge, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Ausserdem ist A_ω abgeschlossen:
Wenn x ein Limespunkt von A_ω ist, dann ist x ein Limespunkt von jedem A_n.Da jedes A_n abgeschlossen ist, ist also $x \in A_n$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also ist $x \in \bigcap_{n<\omega} A_n$.

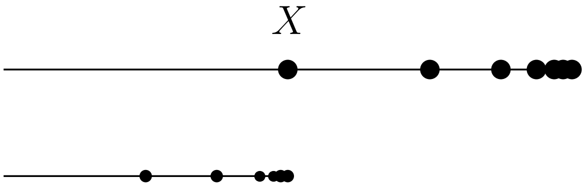
Haben wir mit A_ω einen Fixpunkt von lim erreicht?

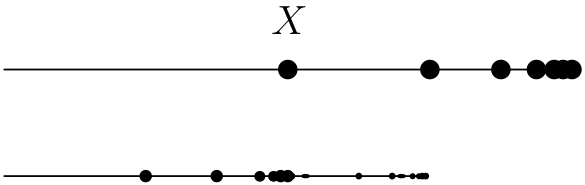
Haben wir mit A_ω einen Fixpunkt von lim erreicht?
Betrachten wir ein paar Beispiele.

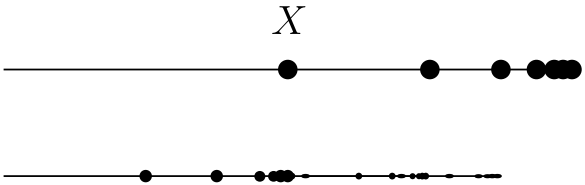

X

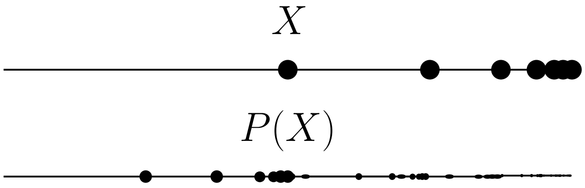


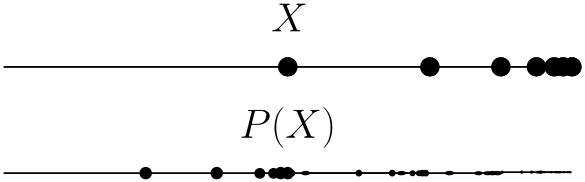
$$\lim(\lim(X)) = \emptyset$$


X


X


X

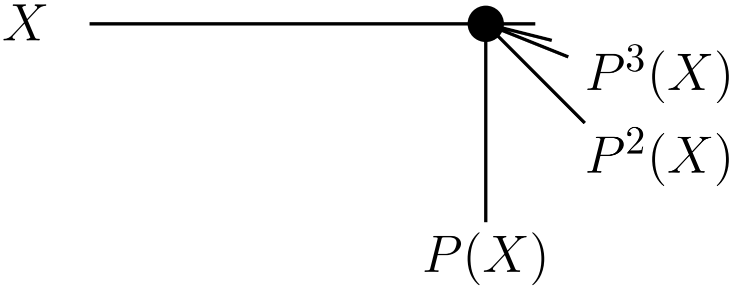

X
$P(X)$



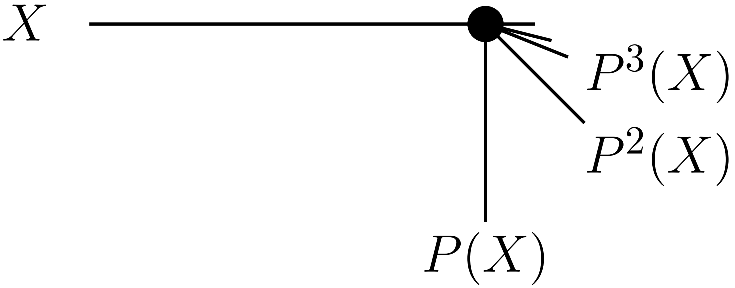
$$\lim(P(X)) = X$$

$$\lim^{n+2}(P^n(X)) = \emptyset$$

Setze nun Y zusammen, wie folgt:



Setze nun Y zusammen, wie folgt:



Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \lim{}^{n}(Y) = \{c\},$$

wobei c das “Zentrum” von Y ist, und der Fixpunkt ist erst einen Schritt später erreicht.

Man kann leicht Kopien von Y zusammensetzen, um Beispiele zu konstruieren, wo der Fixpunkt noch später erreicht wird.

Zurück zum Beweis:

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen.

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt,

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist.

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:

Ist A_ω ein Fixpunkt von lim?

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:
Ist A_ω ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+1} = \lim(A_\omega)$.

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:
Ist A_ω ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+1} = \lim(A_\omega)$.
Ist $A_{\omega+1}$ ein Fixpunkt von lim?

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:

Ist A_ω ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:

$A_{\omega+1} = \lim(A_\omega)$.

Ist $A_{\omega+1}$ ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:

$A_{\omega+2} = \lim(A_{\omega+1})$.

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:

Ist A_ω ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+1} = \lim(A_\omega)$.
Ist $A_{\omega+1}$ ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+2} = \lim(A_{\omega+1})$.
...

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:
Ist A_ω ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+1} = \lim(A_\omega)$.
Ist $A_{\omega+1}$ ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+2} = \lim(A_{\omega+1})$.
...
Wenn keines der $A_{\omega+n}$ ein Limespunkt ist, produzieren wir auf diese Weise wieder eine unendliche Folge, und wir können setzen:

Zurück zum Beweis: Wir haben mit $A = A_0$ angefangen, einer abgeschlossenen Menge reeller Zahlen. Wir haben

$$A_{n+1} = \lim(A_n)$$

gesetzt, und

$$A_\omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Mit A_ω haben wir eine abgeschlossene Menge von reellen Zahlen erreicht, die eine Teilmenge eines jeden A_n ist. Wir können also weitermachen:

Ist A_ω ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+1} = \lim(A_\omega)$.
Ist $A_{\omega+1}$ ein Fixpunkt von lim? Wenn nicht, dann setze:
$A_{\omega+2} = \lim(A_{\omega+1})$.
...
Wenn keines der $A_{\omega+n}$ ein Limespunkt ist, produzieren wir auf diese Weise wieder eine unendliche Folge, und wir können setzen:

$$A_{\omega\cdot 2} := \bigcap_{\alpha<\omega\cdot 2} A_\alpha.$$

Und so weiter. Der Prozess lässt sich transfinit fortsetzen.

Und so weiter. Der Prozess lässt sich transfinit fortsetzen.
Die auftretenden Indizes sind Ordinalzahlen.

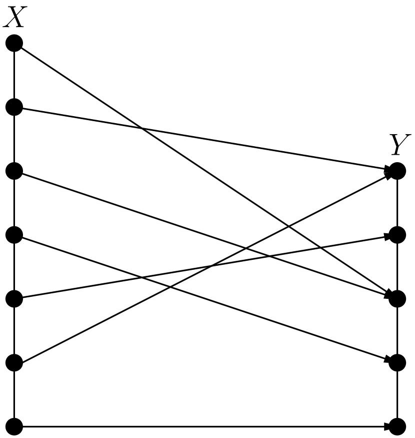
Und so weiter. Der Prozess lässt sich transfinit fortsetzen.
Die auftretenden Indizes sind Ordinalzahlen.
Sie sind ein wesentliches Hilfsmittel der Mengenlehre, um solche Prozesse zu formalisieren. Sie wurden von Georg Cantor entdeckt.

Und so weiter. Der Prozess lässt sich transfinit fortsetzen.
Die auftretenden Indizes sind Ordinalzahlen.
Sie sind ein wesentliches Hilfsmittel der Mengenlehre, um solche Prozesse zu formalisieren. Sie wurden von Georg Cantor entdeckt.
Aber erreicht man irgendwann einen Fixpunkt von lim?

Ja, nach abzählbar vielen Schritten.

Ja, nach abzählbar vielen Schritten. Das heisst, es gibt eine surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ auf die Menge $\mathcal{I}$ bestehend aus den Ordinalzahlen α, für die A_α definiert ist.

Ja, nach abzählbar vielen Schritten. Das heisst, es gibt eine surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ auf die Menge $\mathcal{I}$ bestehend aus den Ordinalzahlen α, für die A_α definiert ist.



Eine Surjektion von X auf Y

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Ersteres ist leicht zu sehen:

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Ersteres ist leicht zu sehen: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Ersteres ist leicht zu sehen: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die definiert ist durch:

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Ersteres ist leicht zu sehen: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die definiert ist durch:

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Ersteres ist leicht zu sehen: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die definiert ist durch:

$$f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

Dann ist f eine Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$.

Fakt

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Ersteres ist leicht zu sehen: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die definiert ist durch:

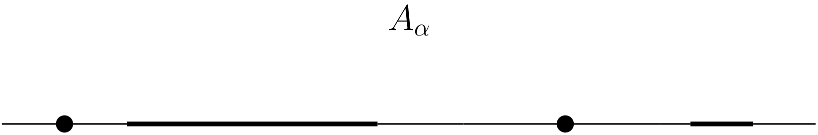
$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m.$$

Dann ist f eine Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$. Dass die reellen Zahlen überabzählbar sind, wurde von Georg Cantor gezeigt.

Nehmen wir an, der Prozess würde nicht im Laufe von abzählbar vielen Schritten einen Fixpunkt erreichen. Sei $\aleph_1$ die kleinste Ordinalzahl, für die die Menge $\mathcal{I} = \{\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$ nicht mehr abzählbar ist.

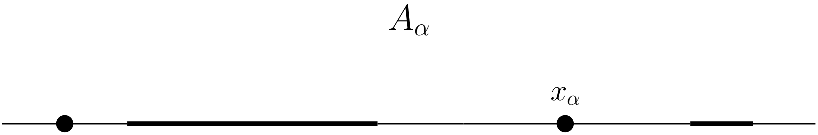
Nehmen wir an, der Prozess würde nicht im Laufe von abzählbar vielen Schritten einen Fixpunkt erreichen. Sei $\aleph_1$ die kleinste Ordinalzahl, für die die Menge $\mathcal{I} = \{\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$ nicht mehr abzählbar ist.
Fixiere $\alpha \in \mathcal{I}$.

Nehmen wir an, der Prozess würde nicht im Laufe von abzählbar vielen Schritten einen Fixpunkt erreichen. Sei $\aleph_1$ die kleinste Ordinalzahl, für die die Menge $\mathcal{I} = \{\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$ nicht mehr abzählbar ist.
Fixiere $\alpha \in \mathcal{I}$.



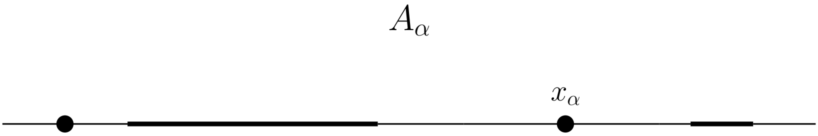
Dann wählen wir für $\alpha \in \mathcal{I}$ ein $x_\alpha \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$.

Nehmen wir an, der Prozess würde nicht im Laufe von abzählbar vielen Schritten einen Fixpunkt erreichen. Sei $\aleph_1$ die kleinste Ordinalzahl, für die die Menge $\mathcal{I} = \{\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$ nicht mehr abzählbar ist.
Fixiere $\alpha \in \mathcal{I}$.



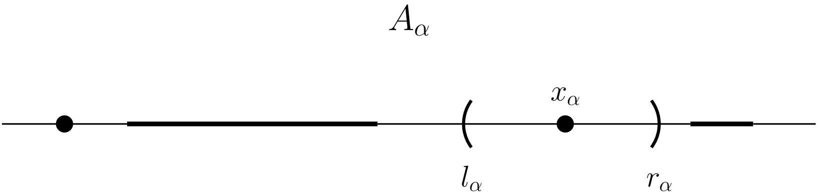
Dann wählen wir für $\alpha \in \mathcal{I}$ ein $x_\alpha \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$.
x_α ist ein isolierter Punkt von A_α.

Nehmen wir an, der Prozess würde nicht im Laufe von abzählbar vielen Schritten einen Fixpunkt erreichen. Sei $\aleph_1$ die kleinste Ordinalzahl, für die die Menge $\mathcal{I} = \{\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$ nicht mehr abzählbar ist.
Fixiere $\alpha \in \mathcal{I}$.



Dann wählen wir für $\alpha \in \mathcal{I}$ ein $x_\alpha \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$.
x_α ist ein isolierter Punkt von A_α.
Wir können also rationale Zahlen l_α und r_α wählen, so dass $(l_\alpha, r_\alpha) \cap A_\alpha = \{x_\alpha\}$ ist.

Nehmen wir an, der Prozess würde nicht im Laufe von abzählbar vielen Schritten einen Fixpunkt erreichen. Sei $\aleph_1$ die kleinste Ordinalzahl, für die die Menge $\mathcal{I} = \{\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$ nicht mehr abzählbar ist.
Fixiere $\alpha \in \mathcal{I}$.



Dann wählen wir für $\alpha \in \mathcal{I}$ ein $x_\alpha \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$.
x_α ist ein isolierter Punkt von A_α.
Wir können also rationale Zahlen l_α und r_α wählen, so dass $(l_\alpha, r_\alpha) \cap A_\alpha = \{x_\alpha\}$ ist.

Aber es gibt nur abzählbar viele solche Paare von rationalen Zahlen und überabzählbar viele $\alpha \in \mathcal{I}$!

Aber es gibt nur abzählbar viele solche Paare von rationalen Zahlen und überabzählbar viele $\alpha \in \mathcal{I}$!
Also existieren $\alpha, \alpha' \in \mathcal{I}$, so dass $l_\alpha = l_{\alpha'}$ und $r_\alpha = r_{\alpha'}$ ist. Sei $\alpha < \alpha'$.

Aber es gibt nur abzählbar viele solche Paare von rationalen Zahlen und überabzählbar viele $\alpha \in \mathcal{I}$!
Also existieren $\alpha, \alpha' \in \mathcal{I}$, so dass $l_\alpha = l_{\alpha'}$ und $r_\alpha = r_{\alpha'}$ ist. Sei $\alpha < \alpha'$. Es folgt:

$$\{x_\alpha\} = (l_\alpha, r_\alpha) \cap A_\alpha \supseteq (l_{\alpha'}, r_{\alpha'}) \cap A_{\alpha'} = \{x_{\alpha'}\}.$$

Aber es gibt nur abzählbar viele solche Paare von rationalen Zahlen und überabzählbar viele $\alpha \in \mathcal{I}$!
Also existieren $\alpha, \alpha' \in \mathcal{I}$, so dass $l_\alpha = l_{\alpha'}$ und $r_\alpha = r_{\alpha'}$ ist. Sei $\alpha < \alpha'$. Es folgt:

$$\{x_\alpha\} = (l_\alpha, r_\alpha) \cap A_\alpha \supseteq (l_{\alpha'}, r_{\alpha'}) \cap A_{\alpha'} = \{x_{\alpha'}\}.$$

Also ist $x_\alpha = x_{\alpha'}$, aber $x_\alpha \notin A_{\alpha+1} \supseteq A_{\alpha'}$. Das ist ein Widerspruch.

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.
$P := A_\theta$ ist dann eine perfekte Teilmenge von A. Sei $S = A \setminus P$.
Wir müssen zeigen, dass S abzählbar ist. Den Beweis überspringen?

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.
$P := A_\theta$ ist dann eine perfekte Teilmenge von A. Sei $S = A \setminus P$.
Wir müssen zeigen, dass S abzählbar ist.
Das folgt mit einem ähnlichen Argument wie oben:

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.
$P := A_\theta$ ist dann eine perfekte Teilmenge von A. Sei $S = A \setminus P$.
Wir müssen zeigen, dass S abzählbar ist.
Das folgt mit einem ähnlichen Argument wie oben:

$$S = A_0 \setminus A_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}.$$

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.
$P := A_\theta$ ist dann eine perfekte Teilmenge von A. Sei $S = A \setminus P$.
Wir müssen zeigen, dass S abzählbar ist.
Das folgt mit einem ähnlichen Argument wie oben:

$$S = A_0 \setminus A_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}.$$

Wäre S nicht abzählbar, dann existierte ein α, so dass $A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ überabzählbar ist.

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.
$P := A_\theta$ ist dann eine perfekte Teilmenge von A. Sei $S = A \setminus P$.
Wir müssen zeigen, dass S abzählbar ist.
Das folgt mit einem ähnlichen Argument wie oben:

$$S = A_0 \setminus A_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}.$$

Wäre S nicht abzählbar, dann existierte ein α, so dass $A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ überabzählbar ist. Für jedes $x \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ kann man nun (l_x, r_x) wählen, so dass l_x, r_x rationale Zahlen sind und

$$A_\alpha \cap (l_x, r_x) = \{x\}$$

ist.

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.
$P := A_\theta$ ist dann eine perfekte Teilmenge von A. Sei $S = A \setminus P$.
Wir müssen zeigen, dass S abzählbar ist.
Das folgt mit einem ähnlichen Argument wie oben:

$$S = A_0 \setminus A_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}.$$

Wäre S nicht abzählbar, dann existierte ein α, so dass $A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ überabzählbar ist. Für jedes $x \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ kann man nun (l_x, r_x) wählen, so dass l_x, r_x rationale Zahlen sind und

$$A_\alpha \cap (l_x, r_x) = \{x\}$$

ist. Wieder gibt es nur abzählbar viele Wahlmöglichkeiten, aber überabzählbar viele x, also existieren $x \neq y$, so dass $l_x = l_y$ und $r_x = r_y$ ist.

Sei also $\theta < \aleph_1$ minimal, so dass $A_\theta = A_{\theta+1}$ ist.
$P := A_\theta$ ist dann eine perfekte Teilmenge von A. Sei $S = A \setminus P$.
Wir müssen zeigen, dass S abzählbar ist.
Das folgt mit einem ähnlichen Argument wie oben:

$$S = A_0 \setminus A_\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}.$$

Wäre S nicht abzählbar, dann existierte ein α, so dass $A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ überabzählbar ist. Für jedes $x \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$ kann man nun (l_x, r_x) wählen, so dass l_x, r_x rationale Zahlen sind und

$$A_\alpha \cap (l_x, r_x) = \{x\}$$

ist. Wieder gibt es nur abzählbar viele Wahlmöglichkeiten, aber überabzählbar viele x, also existieren $x \neq y$, so dass $l_x = l_y$ und $r_x = r_y$ ist. Aber dann ist

$$\{x\} = A_\alpha \cap (l_x, r_x) = A_\alpha \cap (l_y, r_y) = \{y\},$$

also $x = y$, ein Widerspruch. $\square$

Monotone Operatoren

Definition

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ist ein monotoner Operator, wenn für $A \subseteq B \subseteq X$ gilt:

$$\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B).$$

Monotone Operatoren

Definition

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ist ein monotoner Operator, wenn für $A \subseteq B \subseteq X$ gilt:

$$\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B).$$

Monotone Operatoren begegnen einem immer wieder.

Monotone Operatoren

Definition

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ist ein monotoner Operator, wenn für $A \subseteq B \subseteq X$ gilt:

$$\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B).$$

Monotone Operatoren begegnen einem immer wieder. Beispielsweise die Funktion lim aus dem Beweis des Satzes von Cantor-Bendixson ist ein monotoner Operator:

Monotone Operatoren

Definition

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ist ein monotoner Operator, wenn für $A \subseteq B \subseteq X$ gilt:

$$\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B).$$

Monotone Operatoren begegnen einem immer wieder. Beispielsweise die Funktion lim aus dem Beweis des Satzes von Cantor-Bendixson ist ein monotoner Operator:
Wenn $A \subseteq B$ ist und x ein Limespunkt von A ist, dann ist x auch ein Limespunkt von B. Also ist $\lim(A) \subseteq \lim(B)$.

Im Beweis des Satzes von Cantor-Bendixson haben wir einen maximalen Fixpunkt eines monotonen Operators konstruiert.

Im Beweis des Satzes von Cantor-Bendixson haben wir einen maximalen Fixpunkt eines monotonen Operators konstruiert. Hier ist ein Satz über die Existenz von minimalen Fixpunkten.

Im Beweis des Satzes von Cantor-Bendixson haben wir einen maximalen Fixpunkt eines monotonen Operators konstruiert. Hier ist ein Satz über die Existenz von minimalen Fixpunkten.

Theorem

Jeder monotone Operator hat einen minimalen Fixpunkt, das heisst, einen Fixpunkt, der in jedem Fixpunkt enthalten ist.

Beweis: Sei $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ein monotoner Operator. Inzwischen ist es wenig überraschend, dass wir vorgehen, wie folgt:

Beweis: Sei $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ein monotoner Operator. Inzwischen ist es wenig überraschend, dass wir vorgehen, wie folgt:
Sei $A_0 := \emptyset$.

Beweis: Sei $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ein monotoner Operator.
Inzwischen ist es wenig überraschend, dass wir vorgehen, wie folgt:
Sei $A_0 := \emptyset$.
Sei $A_1 := \Gamma(A_0)$.

Beweis: Sei $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ein monotoner Operator.
Inzwischen ist es wenig überraschend, dass wir vorgehen, wie folgt:
Sei $A_0 := \emptyset$.
Sei $A_1 := \Gamma(A_0)$.
Sei $A_2 := \Gamma(A_1)$.

Beweis: Sei $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ein monotoner Operator.
Inzwischen ist es wenig überraschend, dass wir vorgehen, wie folgt:
Sei $A_0 := \emptyset$.
Sei $A_1 := \Gamma(A_0)$.
Sei $A_2 := \Gamma(A_1)$.
...
Sei $A_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Beweis: Sei $\Gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ein monotoner Operator.
Inzwischen ist es wenig überraschend, dass wir vorgehen, wie folgt:
Sei $A_0 := \emptyset$.
Sei $A_1 := \Gamma(A_0)$.
Sei $A_2 := \Gamma(A_1)$.
...
Sei $A_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
...

Dann gilt:

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$$

Dann gilt:

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$$

An Limesstellen λ (wie ω) ist $A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$, also offensichtlich

$$A_\alpha \subseteq A_\lambda,$$

für $\alpha < \lambda$.

Es reicht also zu zeigen: $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha)$.

Es reicht also zu zeigen: $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha)$.
Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein kleinstes α, für das diese Inklusion falsch ist.

Es reicht also zu zeigen: $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha)$.
Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein kleinstes α, für das diese Inklusion falsch ist.
Dann ist $\alpha \neq 0$, denn $A_0 = \emptyset$.

Es reicht also zu zeigen: $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha)$.
Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein kleinstes α, für das diese Inklusion falsch ist.
Dann ist $\alpha \neq 0$, denn $A_0 = \emptyset$.
Ist α ein Nachfolger, dann sei $\alpha = \beta + 1$. Es folgt $A_\beta \subseteq A_{\beta+1}$ nach Minimalität von α, also

$$A_\alpha = A_{\beta+1} = \Gamma(A_\beta) \subseteq \Gamma(A_{\beta+1}) = A_{\beta+2} = A_{\alpha+1}.$$

Es reicht also zu zeigen: $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha)$.
Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein kleinstes α, für das diese Inklusion falsch ist.
Dann ist $\alpha \neq 0$, denn $A_0 = \emptyset$.
Ist α ein Nachfolger, dann sei $\alpha = \beta + 1$. Es folgt $A_\beta \subseteq A_{\beta+1}$ nach Minimalität von α, also

$$A_\alpha = A_{\beta+1} = \Gamma(A_\beta) \subseteq \Gamma(A_{\beta+1}) = A_{\beta+2} = A_{\alpha+1}.$$

Andernfalls ist α eine Limeszahl, also $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$. Also ist $A_\beta \subseteq A_\alpha$, für $\beta < \alpha$, d.h., $\Gamma(A_\beta) \subseteq \Gamma(A_\alpha)$, also $A_{\beta+1} \subseteq A_{\alpha+1}$.
D.h.,

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_{\beta+1} \subseteq A_{\alpha+1}.$$

Da die Folge

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \ldots A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq A_\omega \subseteq A_{\omega+1} \subseteq \ldots\ldots$$

aufsteigend ist, muss sie sich aus abstrakten Gründen irgendwann stabilisieren, weil alle A_α Teilmengen der Menge X sind.

Da die Folge

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \ldots A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq A_\omega \subseteq A_{\omega+1} \subseteq \ldots\ldots$$

aufsteigend ist, muss sie sich aus abstrakten Gründen irgendwann stabilisieren, weil alle A_α Teilmengen der Menge X sind.
Sei α minimal, so dass $A_\alpha = A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha)$ ist.

Da die Folge

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \ldots A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq A_\omega \subseteq A_{\omega+1} \subseteq \ldots\ldots$$

aufsteigend ist, muss sie sich aus abstrakten Gründen irgendwann stabilisieren, weil alle A_α Teilmengen der Menge X sind.
Sei α minimal, so dass $A_\alpha = A_{\alpha+1} = \Gamma(A_\alpha)$ ist.
A_α ist also ein Fixpunkt von Γ.
Warum ist A_α der minimale Fixpunkt von Γ?

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.
Behauptung: $A_\beta \subseteq B$, für jedes β.

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.
Behauptung: $A_\beta \subseteq B$, für jedes β.
Wäre das nicht der Fall, könnte man β minimal wählen, so dass $A_\beta \nsubseteq B$ ist.

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.
Behauptung: $A_\beta \subseteq B$, für jedes β.
Wäre das nicht der Fall, könnte man β minimal wählen, so dass $A_\beta \not\subseteq B$ ist.
Dann ist $\beta \neq 0$, da $A_0 = \emptyset$ ist.

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.
Behauptung: $A_\beta \subseteq B$, für jedes β.
Wäre das nicht der Fall, könnte man β minimal wählen, so dass $A_\beta \not\subseteq B$ ist.
Dann ist $\beta \neq 0$, da $A_0 = \emptyset$ ist.
Offensichtlich ist β keine Limeszahl, denn sonst ist $A_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} A_\xi$, und für jedes $\xi < \beta$ ist $A_\xi \subseteq B$, also gilt das gleiche für die Vereinigung.

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.
Behauptung: $A_\beta \subseteq B$, für jedes β.
Wäre das nicht der Fall, könnte man β minimal wählen, so dass $A_\beta \not\subseteq B$ ist.
Dann ist $\beta \neq 0$, da $A_0 = \emptyset$ ist.
Offensichtlich ist β keine Limeszahl, denn sonst ist $A_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} A_\xi$, und für jedes $\xi < \beta$ ist $A_\xi \subseteq B$, also gilt das gleiche für die Vereinigung.
Aber β kann auch kein Nachfolger sein:

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.
Behauptung: $A_\beta \subseteq B$, für jedes β.
Wäre das nicht der Fall, könnte man β minimal wählen, so dass $A_\beta \not\subseteq B$ ist.
Dann ist $\beta \neq 0$, da $A_0 = \emptyset$ ist.
Offensichtlich ist β keine Limeszahl, denn sonst ist $A_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} A_\xi$, und für jedes $\xi < \beta$ ist $A_\xi \subseteq B$, also gilt das gleiche für die Vereinigung.
Aber β kann auch kein Nachfolger sein:
Wäre $\beta = \gamma + 1$, dann hätten wir $A_\gamma \subseteq B$ nach Minimalität von β.

Sei B ein beliebiger Fixpunkt von Γ.
Behauptung: $A_\beta \subseteq B$, für jedes β.
Wäre das nicht der Fall, könnte man β minimal wählen, so dass $A_\beta \not\subseteq B$ ist.
Dann ist $\beta \neq 0$, da $A_0 = \emptyset$ ist.
Offensichtlich ist β keine Limeszahl, denn sonst ist $A_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} A_\xi$, und für jedes $\xi < \beta$ ist $A_\xi \subseteq B$, also gilt das gleiche für die Vereinigung.
Aber β kann auch kein Nachfolger sein:
Wäre $\beta = \gamma + 1$, dann hätten wir $A_\gamma \subseteq B$ nach Minimalität von β. Also:

$$A_\beta = A_{\gamma+1} = \Gamma(A_\gamma) \subseteq \Gamma(B) = B,$$

wegen der Monotonie von Γ und der Annahme, dass B ein Fixpunkt von Γ ist. $\square$

Moral

Moral

Selbst wenn man unendlich oft

Selbst wenn man unendlich oft
erfolglos

Selbst wenn man unendlich oft
erfolglos
versucht hat, sein Ziel zu erreichen,

Moral

Selbst wenn man unendlich oft
erfolglos
versucht hat, sein Ziel zu erreichen,
ist das noch *lange* kein Grund

Moral

Selbst wenn man unendlich oft
erfolglos
versucht hat, sein Ziel zu erreichen,
ist das noch *lange* kein Grund
aufzugeben.