Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band VII. Jahrgang 1877.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1877.

In Commission bei G. Franz.

Herr L. Seidel sprach:

„Ueber eine einfache Entstehungsweise der Bernoulli'schen Zahlen und einiger verwandten Reihen".

1.

(Worterklärung.) Wenn zu einer Grössenreihe a, b, c, d, ... von unbestimmter Ausdehnung die Differenzen gebildet werden

$$\Delta b = b - a$$
$$\Delta c = c - b$$
$$\Delta d = d - c$$
$$\text{etc.}$$

darauf aus diesen die zweiten Differenzen

$$\Delta^2 c = \Delta c - \Delta b$$
$$\Delta^2 d = \Delta d - \Delta c$$
$$\text{etc.}$$

ferner die dritten

$$\Delta^3 d = \Delta^2 d - \Delta^2 c$$
$$\text{etc.}$$

und so fort, sodass das nur nach links und nach oben begrenzte Differenzen-Tableau entsteht:

$$
\begin{array}{llllllll}
a & & & & & & & \\
 & \Delta b & & & & & & \\
b & & \Delta^2 c & & & & & \\
 & \Delta c & & \Delta^3 d & & & & \\
c & & \Delta^2 d & & \Delta^4 e & & & \\
 & \Delta d & & \Delta^3 e & & \Delta^5 f & & \\
d & & d^2 e & & \Delta^4 f & & \dots & \\
 & \Delta e & & \Delta^3 f & & \dots & & \dots \\
e & & d^2 f & & \dots & & \dots & \\
 & \Delta f & & \dots & & \dots & & \\
f & & \dots & & \dots & & & \\
 & \dots & & \dots & & & & \\
\dots & & \dots & & & & & \\
 & \dots & & & & & & \\
\dots & & & & & & &
\end{array}
$$

so soll im Folgenden die Grössen-Folge a, b, c, d, . . . die Stammreihe und die Grössenfolge a, Δb, $\Delta^2 c$, $\Delta^3 d$, ... welche die andere Begrenzung des Tableau's bildet, die Terminal-Reihe der Kürze halber genannt werden [1]).

Alsdann findet folgender Satz statt, in welchem sich wahrscheinlich die einfachste Genesis der Bernoulli'schen Zahlen ausspricht:

Beginnt man die Tabelle mit der Zahl $a = V_0 = 1$ und setzt sie durch weitere Grössen $b = V_1$, $c = V_2$ etc. nach der Vorschrift fort, dass vom 3ten Gliede an Stammreihe und Terminalreihe durchaus übereinstimmen, so wird

$$
\text{I)} \qquad
\begin{array}{ll}
V_1 = \frac{1}{2} & V_2 = B_1 = \frac{1}{6} \\
V_3 = 0 & V_4 = -B_2 = -\frac{1}{30} \\
V_5 = 0 & V_6 = +B_3 = \frac{1}{42} \\
V_7 = 0 & V_8 = -B_4 = -\frac{1}{30} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

---

1) Nach einer an sich gleich berechtigten und wohl etwas häufiger gebrauchten Schreibweise würden die Glieder unsrer Terminal-Reihe mit a, Δa, $\Delta^2 a$, etc. zu benennen sein. Für das Folgende ist aber die hier angewandte Bezeichnung entschieden bequemer, weil es hier wichtiger

wobei die Grössen B die Bernoulli'schen Zahlen sind, und wo allgemein V_r der Coefficient ist des Gliedes erster Ordnung in der ganzen Function $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades von m, welche (für ganze Zahlen m) gleich ist der Summe $0^r + 1^r + 2^r + \ldots + m^r$.

Abgekürzt kann man den Satz so fassen:

Die Reihe der Bernoulli'schen Zahlen ist zum Anfangsgliede 1 diejenige Fortsetzung, welche vom dritten Gliede an sich selbst zur Terminalreihe hat.

Schon b muss den besonderen Werth $V_1 = \frac{1}{2}$ haben, damit (bei $a = 1$) $c = \varDelta^2 c$ werden kann; ebenso muss dann c selbst den bestimmten Werth $\frac{1}{6}$ erhalten, damit $d = \varDelta^3 d$ wird, u. s. w., sodass, wenn man Einmal $a = 1$ an die Spitze gestellt hat, alles weitere mit Nothwendigkeit bestimmt ist. (In einer Reihe auch schon $b = \varDelta b$ zu machen neben $c = \varDelta^2 c$, $d = \varDelta^3 d$ etc. ist unmöglich, wenn sie nicht aus lauter Nullen bestehen soll.)

Wenn man die in unserm obigen Tableau schief aufsteigende Zahlenreihe, welche mit correspondirenden Gliedern der Stamm- und Terminalreihe, wie b und $\varDelta b$, c und $\varDelta^2 c$, d und $\varDelta^3 d$ . . . endigt, der Kürze halber eine Zeile der Differenzentafel nennt, so ist die Differenz zwischen beliebigen zwei Gliedern einer Zeile immer gleich der Summe der zwischenstehenden Glieder in der vorangehenden, d. h. wenn g , h aufeinanderfolgende Glieder der Stammreihe sind und $s > r$ so hat man

$$\overset{r}{\varDelta} g + \overset{r+1}{\varDelta} g + \ldots + \overset{s-1}{\varDelta} g = \overset{r}{\varDelta} h - \overset{s}{\varDelta} h$$

wie sich durch Summation der Definitionsgleichungen

---

ist, das veränderliche letzte als das meist constante erste Glied sogleich erkennen zu lassen, welches bei der Bildung irgend einer Differenz contribuirt hat.

a							
	Δb						
b		$\Delta^2 c$					
	Δc		$\Delta^3 d$				
c		$\Delta^2 d$		$\Delta^4 e$			
	Δd		$\Delta^3 e$		$\Delta^5 f$		
d		$d^2 e$		$\Delta^4 f$		. . .	
	Δe		$\Delta^3 f$		. . .		. . .
e		$d^2 f$		. . .		. . .	
	Δf		. . .		. . .		
f		. . .		. . .			
	. . .		. . .				
. . .		. . .					
	. . .						
. . .							

so soll im Folgenden die Grössen-Folge a, b, c, d, ... die **Stammreihe** und die Grössenfolge a, Δb, $\Delta^2 c$, $\Delta^3 d$, ... welche die andere Begrenzung des Tableau's bildet, die **Terminal-Reihe** der Kürze halber genannt werden [1]).

Alsdann findet folgender Satz statt, in welchem sich wahrscheinlich die einfachste Genesis der **Bernoulli'schen Zahlen** ausspricht:

Beginnt man die Tabelle mit der Zahl $a = V_0 = 1$ und setzt sie durch weitere Grössen $b = V_1$, $c = V_2$ etc. nach der Vorschrift fort, dass vom 3ten Gliede an Stammreihe und Terminalreihe durchaus übereinstimmen, so wird

$$\text{I)}\qquad \begin{array}{ll} V_1 = \frac{1}{2} & V_2 = B_1 = \frac{1}{6} \\ V_3 = 0 & V_4 = -B_2 = -\frac{1}{30} \\ V_5 = 0 & V_6 = +B_3 = \frac{1}{42} \\ V_7 = 0 & V_8 = -B_4 = -\frac{1}{30} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

---

1) Nach einer an sich gleich berechtigten und wohl etwas häufiger gebrauchten Schreibweise würden die Glieder unsrer Terminal-Reihe mit a, Δa, $\Delta^2 a$, etc. zu benennen sein. Für das Folgende ist aber die hier angewandte Bezeichnung entschieden bequemer, weil es hier wichtiger

wobei die Grössen B die Bernoulli'schen Zahlen sind, und wo allgemein V_r der Coefficient ist des Gliedes erster Ordnung in der ganzen Function $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades von m, welche (für ganze Zahlen m) gleich ist der Summe $0^r + 1^r + 2^r + \ldots + m^r$.

Abgekürzt kann man den Satz so fassen:

Die Reihe der Bernoulli'schen Zahlen ist zum Anfangsgliede 1 diejenige Fortsetzung, welche vom dritten Gliede an sich selbst zur Terminalreihe hat.

Schon b muss den besonderen Werth $V_1 = \frac{1}{2}$ haben, damit (bei $a = 1$) $c = \Delta^2 c$ werden kann; ebenso muss dann c selbst den bestimmten Werth $\frac{1}{6}$ erhalten, damit $d = \Delta^3 d$ wird, u. s. w., sodass, wenn man Einmal $a = 1$ an die Spitze gestellt hat, alles weitere mit Nothwendigkeit bestimmt ist. (In einer Reihe auch schon $b = \Delta b$ zu machen neben $c = \Delta^2 c$, $d = \Delta^3 d$ etc. ist unmöglich, wenn sie nicht aus lauter Nullen bestehen soll.)

Wenn man die in unserm obigen Tableau schief aufsteigende Zahlenreihe, welche mit correspondirenden Gliedern der Stamm- und Terminalreihe, wie b und Δb, c und $\Delta^2 c$, d und $\Delta^3 d$ . . . endigt, der Kürze halber eine Zeile der Differenzentafel nennt, so ist die Differenz zwischen beliebigen zwei Gliedern einer Zeile immer gleich der Summe der zwischenstehenden Glieder in der vorangehenden, d. h. wenn g , h aufeinanderfolgende Glieder der Stammreihe sind und $s > r$ so hat man

$$\overset{r}{\Delta} g + \overset{r+1}{\Delta} g + \ldots + \overset{s-1}{\Delta} g = \overset{r}{\Delta} h - \overset{s}{\Delta} h$$

wie sich durch Summation der Definitionsgleichungen

---

ist, das veränderliche letzte als das meist constante erste Glied sogleich erkennen zu lassen, welches bei der Bildung irgend einer Differenz contribuirt hat.

$$\begin{aligned}\overset{r}{\Delta} h - \overset{r}{\Delta} g &= \overset{r+1}{\Delta} h \\ \overset{r+1}{\Delta} h - \overset{r+1}{\Delta} g &= \overset{r+2}{\Delta} h \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \overset{s-1}{\Delta} h - \overset{s-1}{\Delta} g &= \overset{s}{\Delta} h\end{aligned}$$

sofort ergibt. Daraus folgt, dass, wenn die beiden extremen Glieder einer Zeile unserm Postulate gemäss einander gleich sein sollen, die Summe der Glieder der vorangehenden Zeile, in unserm Falle sonach jeder einzelnen Zeile von der zweiten an, gleich Null sein muss. Hieraus kann man sich eine Regel entnehmen, um die Tafel mit den Bernoulli'schen Zahlen successive zu erweitern. Gesetzt sie liegt mit allen Differenzen bereits ausgefüllt vor bis zu den Grössen

$$V_{2p} = (-1)^{p+1} B_p \text{ und } V_{2p+1} = 0$$

einschliesslich, und V_{2p+2} wird gesucht, so beginne man provisorisch eine neue Zeile nach Belieben auf der Seite der Stammreihe oder der Terminalreihe mit 0, und fülle demgemäss diese Zeile aus; die Anzahl ihrer Glieder ist $2p + 3$, die Summe derselben finde sich $= \omega$. Alsdann muss man an die Stelle des provisorischen Werthes Null am Ende der Zeile setzen

$$V_{2p+2} = (-1)^p B_{p+1} = -\frac{\omega}{2p+3}$$

wodurch offenbar jedes Glied der Zeile um eben diese Grösse verändert und also die Summe richtig auf Null gebracht wird.

(Eine Abkürzung dieser Vorschrift s. in § 2).

Der Beweis, dass die nach unserer Regel gefundenen Grössen V in der That die bekannten sind, ergibt sich aus Folgendem:

Wenn aus einer Anzahl $q+1$ von Grössen a, b, c, ... v, w, x alle Differenzen unseres Tableau's gebildet werden, so drückt sich bekanntlich die letzte derselben durch die Glieder der Stammreihe aus wie folgt:

$$\Delta^q x = x - \frac{q}{1} w + \frac{q(q-1)}{1\cdot 2} v - \ldots \pm \frac{q(q-1)\ldots 2}{1\cdot 2\cdots(q-1)} b$$
$$\mp \frac{q(q-1)\ldots 1}{1\cdot 2 \cdots q} a$$

Wenn also für a, b, c ... x solche Zahlen $V_0, V_1, \ldots V_q$ genommen werden, welche (abgesehen von den zwei ersten Gliedern in der Reihe) allgemein machen $\Delta^q x = x$, so genügen diese Grössen der recurrirenden Gleichung

$$\text{II)}\quad 0 = \frac{q}{1} V_{q-1} - \frac{q(q-1)}{1\cdot 2} V_{q-2} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1\cdot 2\cdot 3} V_{q-3}$$
$$- \ldots \pm \frac{q(q-1)\ldots 2}{1\cdot 2\ldots(q-1)} V_1 \mp \frac{q(q-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots q} V_0$$

aus welcher sie, nachdem $V_0 = 1$ gesetzt ist, in bekannter Weise gemäss den Gleichungen I. bestimmt sind.

Will man indess nicht schon als bekannt voraussetzen, dass die Bernoulli'schen Zahlen nebst zwischengesetzten Nullen es sind, die dieser recurrirenden Gleichung genügen (— etwa weil man zur Bestimmung jener Zahlen von der Gleichung nicht gleichzeitig für gerade und für ungerade q Gebrauch zu machen nöthig hat —), so wird die Bedeutung unserer V am Bequemsten durch folgenden allgemeinen Satz ermittelt:

Wenn man hat

$$\text{III)}\quad a + \frac{b}{1} y + \frac{c}{1\cdot 2} y^2 + \frac{d}{1\cdot 2\cdot 3} y^3 + \ldots \textit{ in inf.} = f(y)$$

so ist zugleich

$$\text{III*)}\quad a + \frac{\Delta b}{1} y + \frac{\Delta^2 c}{1\cdot 2} y^2 + \frac{\Delta^3 d}{1\cdot 2\cdot 3} y^3 + \ldots \textit{ in inf.} = f(y) e^{-y}$$

(Der Beweis ergibt sich aus der Multiplication der Reihen fy und e^{-y} und aus dem obigen Ausdrucke der Differenzen durch die Glieder der Stammreihe von selbst.)

Da nun in unserem Falle die letztere Reihe von der ersteren nur um $-y$ verschieden ist, so bestimmt sich f durch die Gleichung

$$f(y)e^{-y} = f(y) - y$$

und indem man setzt $y = \vartheta i$ und für die a, b .. unsere V nimmt, so findet sich

$$\text{IV)} \quad \tfrac{1}{2}\vartheta \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\vartheta = V_0 - \frac{V_2}{1\cdot 2}\vartheta^2 + \frac{V_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\vartheta^4 - \dots$$

$$= 1 - \frac{B_1}{1\cdot 2}\vartheta^2 - \frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\vartheta^4 - \dots.$$

übereinstimmend mit der bekannten Bedeutung der Bernoulli'schen Zahlen für die Entwicklung dieser Functionen.

2.

Wenn man den Anfang der in Zahlen ausgefüllten Differenzen-Tafel vor sich hat. (s. die Beilage 1), so erkennt man, ausser dem schon hervorgehobenen Gesetze, dass in jeder Zeile die Summe aller Glieder gleich Null ist, noch eine durchgehend symmetrische Stellung der Zahlen in jeder Zeile nach beiden Seiten ihrer Mitte, — in der Art, dass in den Zeilen von ungerader Gliederzahl (welche mit Bernoulli'schen Zahlen endigen) beiderseits des Mittelgliedes auch die Vorzeichen dieselben sind, während in den mit Nullen endigenden Zeilen von gerader Gliederzahl die Zeichen beiderseits entgegengesetzt sind und dadurch das Verschwinden der Summe bedingen.

Dass diese Symmetrie ein durch die ganze Tafel bestehendes Gesetz ist, erkennt man leicht durch vollständige Induction, welche von Einer Zeile, in der es erfüllt ist, zunächst auf die folgende schliesst. Indem man sich die erste Hälfte der neuen Zeile aus ihrem Anfangsglied (in der Stammreihe) und aus den Gliedern der vorigen Zeile durch Subtraction abgeleitet denkt, die zweite Hälfte der neuen Zeile aber durch Addition aus ihrem mit dem Anfangsglied übereinstimmenden Terminalglied und den Gliedern der zweiten Hälfte der vorigen Zeile, so hat man vorwärts und rückwärts durchaus dieselben Zahlenpaare, nur nach Umständen mit entgegengesetzten Zeichen, zu vereinigen.

Offenbar muss hiernach in den Zeilen von ungerader Gliederzahl das Mittelglied entgegengesetzt gleich sein dem doppelten der Summe der ihm vorangehenden oder auch der ihm nachfolgenden Glieder, — wonach sich nunmehr, wenn die Differenzentafel bis einschliesslich zu den Zeilen mit V_{2p} und mit $V_{2p+1} = 0$ ausgefüllt vorliegt, ein abgekürztes Verfahren zur Berechnung von V_{2p+2} ergibt.

Man setzt (wie zuvor) an die Stelle dieser noch unbekannten Grösse in der Stamm- oder in der Terminalreihe provisorisch eine Null, füllt aber von da aus die neue Zeile nur bis einschliesslich zu ihrem Mittelgliede aus: findet man dieses $= \tau$ und die Summe der auf seiner Einen Seite stehenden Glieder $= \sigma$, so ist der richtige Werth

$$\text{V)} \qquad V_{2p+2} = -\frac{2\sigma + \tau}{2p+3}$$

Diese auf der Symmetrie in den einzelnen Zeilen beruhende Abkürzung lässt sich aber ebensogut in den Formeln wie in der Zahlenrechnung verwerthen.

Nach dem schon in § 1 benutzten Satze über die Summe einer Reihe auf einander folgender Glieder einer Zeile ist der Complex derjenigen, welche vor dem Mittelgliede der mit der Bernoulli'schen Zahl V_{2p} beginnenden Zeile stehen;

$$V_{2p} + \varDelta V_{2p} + \varDelta^2 V_{2p} + \ldots + \varDelta^{p-1} V_{2p}$$

$$= V_{2p+1} - \varDelta^p V_{2p+1} = - \varDelta^p V_{2p+1}$$

(wenn p nicht $=0$).

Dagegen ist das Mittelglied jener Zeile $= \varDelta^p V_{2p}$; man muss also haben

$$\varDelta^p V_{2p} = 2 \varDelta^p V_{2p+1}$$

wie auch aus der Zahlentafel ersichtlich ist. Drückt man nun diese beiden Differenzen durch die Glieder der Stammreihe aus, so erhält man:

$$V_{2p} - \frac{p}{1} V_{2p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} V_{2p-2} - \ldots$$

$$= 2 \left(V_{2p+1} - \frac{p}{1} V_{2p} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} V_{2p-1} - \ldots \right)$$

wo die Summen beiderseits durch das Verschwinden der Binominal-Coefficienten von selbst an gehöriger Stelle abbrechen; nämlich links hinter dem Gliede mit V_p und rechts hinter demjenigen mit V_{p+1}. Setzt man voraus, dass p mindestens $= 2$ ist, so sind die V von ungeradem Index, welche in der Gleichung vorkommen, alle Null. Die Gleichung geht in diesem Falle in folgende Form über:

$$\text{VI)} \quad \frac{p+1}{1} V_{2p} (2p+1) + \frac{(p+1) p (p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} V_{2p-2} (2p-1)$$

$$+ \frac{(p+1) p (p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} V_{2p-4} (2p-3) + \ldots = 0$$

oder noch etwas eleganter, indem man setzt

$$\text{VII)} \qquad Y_{2p} = (2p+1) V_{2p} = (-1)^{p+1} (2p+1) B_p$$

in die folgende:

$$\text{VIII)} \qquad \frac{p+1}{1} Y_{2p} + \frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{1\cdot 2\cdot 3} Y_{2p-2} + \frac{(p+1)\,p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} Y_{2p-4} + \ldots = 0$$

Dies ist die vereinfachte recurrirende Gleichung für die Bernoulli'schen Zahlen, nach welcher jede neue Grösse dieser Art nicht durch die sämmtlichen ihr vorangehenden ausgedrückt erscheint (wie in der gewöhnlischen Formel), sondern auf wesentlich halb so viel Glieder reducirt ist. Denn je nachdem p gerad oder ungerad ist, endigt die Reihe mit Y_p oder schon mit Y_{p+1}.

Der Fall ist vielleicht der erste von der Art, dass die Zurückführung einer neuen Grösse erfolgt auf eine Anzahl von vorausgehenden, die nicht fix ist, aber doch nicht bis an den Anfang zurückgeht.

Im Uebrigen ist unsere Gleichung auch noch desshalb bequemer als die gewöhnliche, weil die in ihr auftretenden Binomial-Coefficienten zu einer viel niedrigeren Potenz gehören, daher auf kleinere Zahlen führen [2]).

Sind z. B. bekannt die Werthe

$$V_2 = \frac{1}{6},\ V_4 = -\frac{1}{30},\ V_6 = +\frac{1}{42},\ V_8 = -\frac{1}{30},\ V_{10} = +\frac{5}{66}$$

---

2) von Staudt gibt in § 9 seiner Dissertation de numeris Bernoullianis (Erlangen 1845), welche auch den Beweis seines schönen Satzes über die Nenner derselben enthält, Formeln von wesentlich ebensoviel Gliedern wie oben für jedes neue B. In jeder derselben kommen aber dennoch alle vorausgehenden B, paarweise zu Producten verbunden, vor. Dem eben erwähnten Beweise selbst ist dort eine Darstellung von B_r durch die Terminalglieder zur Stammreihe $0^{2r}, 1^{2r}, 2^{2r}, \ldots (2r)^{2r}$ zu Grunde gelegt Auch die Verbindung, welche G. Bauer in Crelle — Borchardt's Journal., Bd. 58, mit Staudt ganz ähnlichen Ausgang nehmend, zwischen der harmonischen Reihe und der der Bernoulli'schen Zahlen nachgewiesen hat, ist aufs Engste verwandt mit der Beziehung zwischen Stamm- und Terminalreihe.

oder

$$Y_2 = \frac{1}{2}\,,\ Y_4 = -\frac{1}{6}\,,\ Y_6 = +\frac{1}{6}\,,\ Y_8 = -\frac{3}{10}\,,\ Y_{10} = +\frac{5}{6}$$

so erhält man für die sechste Bernoulli'sche Zahl:

$$7Y_{12} + 35Y_{10} + 21Y_8 + Y_6 = 0$$

oder

$$-7Y_{12} = \frac{875 - 189 + 5}{30} = \frac{691}{30}$$

daher

$$Y_{12} = -\frac{691}{210} = 13\ V_{12}\ ;\ B_6 = \frac{691}{2730}$$

Ebenso nunmehr für die siebente:

$$8Y_{14} + 56Y_{12} + 56Y_{10} + 8Y_8 = 0$$

$$Y_{14} = -7(Y_{12} + Y_{10}) - Y_8 = \frac{691 - 175 + 9}{30}$$

$$= \frac{35}{2} = 15\ V_{14}\ ;\ B_7 + \frac{7}{6}$$

u. s. w.

3.

Man gelangt ebenfalls zu den Bernoulli'schen Zahlen, zwar nicht völlig so direct, aber auf eine für die numerische Rechnung noch bequemere Weise, wenn man (abgesehen vom Anfang) die Glieder der Terminalreihe denjenigen der Stammreihe entgegengesetzt anordnet. Nur im Vorbeigehen mag der Fall erwähnt werden, wo man zu $a = 1$ schon $b = -\Delta b$, $c = -\Delta^2 c$, $d = -\Delta^3 d$ etc. postulirt; hier wird die Stammreihe

$$1\,,\ R_1 = \frac{1}{2}\,,\ 0\,,\ -R_3\,,\ 0\,,\ +R_5\,,\ 0\,,\ -R_7\,,\ \ldots$$

wobei die Grössen R die Bedeutung haben

$$\text{IX)} \qquad R_{2m-1} = \frac{1}{m}(2^{2m} - 1) B_m$$

$$\text{X)} \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = \frac{R_1}{1}\vartheta + \frac{R_3}{1\cdot 2\cdot 3}\vartheta^3 + \frac{R_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\vartheta^5 + \dots$$

Ihre Berechnung durch successive Ausfüllung des Differenzen-Tableau's würde sich zunächst auf das Princip gründen lassen, nach welchem die Differenz zwischen Stammglied und Terminalglied einer Zeile, hier also die Grösse $\pm 2R_{2m+1}$ immer gleich ist der Summe aller Glieder der vorangehenden Zeile; man würde aber alsbald auf eine sehr wirksame Vereinfachung des Algorithmus geführt werden durch die Wahrnehmung einer dem vorigen Falle durchaus analogen Symmetrie in der Stellung der Zahlen der einzelnen Zeilen, und durch den mit Hilfe dieser Symmetrie leicht zu erweisenden Umstand, dass auch hier das Mittelglied einer Zeile von ungerader Gliederzahl gleich ist dem doppelten des in der Differenzen-Tabelle gerade unter ihm stehenden Gliedes. Man erhält dabei, wie leicht einzusehen, bei den Zahlen der Tafel keine andern Nenner, als Potenzen von 2. Noch wesentlich bequemer, weil man nur mit **ganzen Zahlen** zu rechnen hat, gestaltet sich aber die Sache, wenn man den Beginn der Reihe ein wenig ändert.

Macht man nämlich

$$a = 0 \ , \ b = 1$$

und setzt nun die Stammreihe so fort, dass

$$c = -\Delta^2 c \ , \ d = -\Delta^3 d \ , \ \dots$$

wird, – so gestaltet sie sich wie folgt:

$$0 \ , \ 1 \ , \ +D_1 \ , \ 0 \ , \ -D_3 \ , \ 0 \ , \ +D_5 \ , \dots$$

wobei man hat

$$\text{XI)} \qquad D_{2m-1} = 2\,(2^{2m} - 1)\,B_m$$

und

$$\text{XII)} \quad \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\vartheta = \frac{D_1}{1\cdot 2}\,\vartheta + \frac{D_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\vartheta^3 + \frac{D_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,\vartheta^5 + \dots$$

Bekanntlich sind die Grössen $2\,(2^{2m} - 1)\,B_m$ ungerade ganze Zahlen. Wenn man sich erlaubt dieselben (die übrigens noch mit $2^{2m} - 1$ gemeinschaftliche Factoren enthalten können, die sich dann bei der Bildung von B_m aufheben) der Kürze halber die „Bernoulli'schen Zähler" zu nennen, so kann man sonach unsern Satz, in einer zwar abgekürzten aber der Erläuterung nicht bedürfenden Form, so aussprechen:

Die Bernoulli'schen Zähler sind zu den Anfangsgliedern 0 , 1 diejenige Fortsetzung, bei welcher alle ferneren Glieder der Stammreihe den entsprechenden der Terminalreihe entgegengesetzt werden.

Denn nach dem allgemeinen Satze (s. oben Gl. III. und III*), wonach

$$fx\,e^{-x} = \left(a + \frac{bx}{1} + \frac{cx^2}{1\cdot 2} + \dots\right)e^{-x} = a + \frac{\Delta b}{1}\,x + \frac{\Delta^2 c}{1\cdot 2}\,x^2 + \dots$$

erhält man mit den oben angeführten unserem Falle entsprechenden Werthen a, b, c, . . . und den dazu gehörigen Δb, $\Delta^2 c$, . . . :

$$fx\,e^{-x} = 2x - fx$$

also

$$fx = \frac{2x}{1 + e^{-x}}$$

woraus sich Gl. XII. ergibt wenn man $x = \vartheta i$ setzt.

Denkt man sich nun, um von der 3ten Zeile an in Stamm- und Terminalreihe entgegengesetzte Glieder zu erhalten, den Anfang des Differenzen-Tableau's

$$\begin{array}{cc} 0 & \\ & 1 \\ 1 & \end{array}$$

zunächst (wie in dem letztbesprochnen Falle) auf die Weise fortgesetzt, dass man jede weitere Zeile in der Stammreihe mit der Hälfte der Gliedersumme der ihr vorangehenden Zeile beginnt, so tritt sofort in der so angelegten Tafel (s. Beilage 2) wieder die Symmetrie in den Zahlen einer Zeile hervor, — diesmal in der Weise, dass in den mit Null beginnenden und ebenso endigenden Zeilen von gerader Gliederzahl in gleichen Entfernungen von der Zeilenmitte beiderseits gleiche Zahlen stehen, während die mit $\pm$ D beginnenden und mit $\mp$ D endigenden Zeilen ungerader Nummer in der Mitte eine Null, und beiderseits derselben entgegengesetze Zahlen enthalten. Die allgemeine Giltigkeit dieser Regel wird (ganz wie in § 2) durch vollständige Induction sofort evident gemacht, indem man immer die erste Hälfte einer neuen Zeile aus der ersten Hälfte der vorangehenden und dem Stammgliede der neuen, die zweite Hälfte der letztern aber aus ihrem dem Stammgliede entgegengesetzten Terminalgliede und der zweiten Hälfte der vorangehenden sich berechnet denkt. Hiernach kennt man also in den Zeilen ungerader Nummer, welche mit $\pm$ D beginnen, mit $\mp$ D endigen müssen, ohne Weiteres das Mittelglied 0, von welchem aus man nunmehr diese Zeilen ganz leicht ausfüllt, während die Zeilen gerader Nummer, da sie mit 0 anfangen und schliessen, von dem Einen dieser Enden an ausgefüllt werden. Damit ist auch evident, dass die Tafel nur ganze Zahlen enthalten kann; und es wird unnöthig, bei der Rechnung, von den einzelnen Zeilen des Tableau's mehr als die Hälfte (einschliesslich des Mittelgliedes 0, wo ein solches vorhanden ist) anzuschreiben. Man bemerkt weiter in den Zeilen-Hälften, auf welche hiernach die Betrachtung reducirt werden kann, dass alterirend ein Paar derselben nur positive, das nächste Paar nur negative Zahlen enthält, u. s. f.; und beweist leicht wieder durch vollständige Induction (mit Hilfe des Umstandes, dass die Zeilenhälften abwechselnd mit 0 beginnen und endigen) die Allgemeinheit auch dieses Gesetees, zufolge dessen alle D positiv ausfallen. Folge eben dieses Umstandes ist es weiter, dass, indem man die Ausfüllung der Halbzeilen stets auf der Seite beginnt, wo in ihnen die 0 steht, und also abwechselnd von links nach rechts und von rechts nach links rechnet (*βουστροφηδόν*) die absoluten Werthe der Zahlen beständig wachsen, indem niemals zwei mit ungleichem Vorzeichen zusammenzulegen sind. Für die numerische Rechnung kann man hiernach die Zahlentafel der Form einer Differenzen-Tabelle entkleiden, durchaus einfach die absoluten Werthe ansetzen, die zuvor von links nach rechts aufsteigende Zeile horizontal anordnen, und durch eine leichte Verschiebung derselben bewirken, dass überall die Zahlen gerade unter einander zu stehen kommen, welche man in der Rechnung zusammen zu addiren hat. Auf diese Art erhält man an Stelle der Hälfte unseres Differenzen-Tableau's zur leichten und ganz mechanischen Berechnung der Bernoulli'schen Zähler das treppenförmige Schema in Beilage 3 [3]), in welchem, abgesehen von den Nullen, mit welchen, abwechselnd links und rechts, die Zeilen beginnen, jede Zahl die Summe ist aus der neben ihr stehenden kleineren (oder gleichen) und der gerade über dieser letztern befindlichen Zahl. Fügt man die

3) In derjenigen Anordnung, welche für die Beilage gewählt wurde, sind, wenn man die Zeilen mit den vorderen Zeilenhälften in Beilage 2 vergleicht, links und rechts gegen einander umgetauscht.

Vorschrift hinzu, dass jede neue Zeile mit einer Null gerade unter der zuletzt angeschriebenen Zahl der vorausgehenden begonnen wird, und endlich, dass (in der von uns gewählten Anordnung) jede links mit 0 beginnende Zeile rechts mit einer Zahl über die vorangehende heraustritt (indem auch noch die Null der letztern zu der unter sie geschriebenen addirt, d. h. letztere Zahl repetirt wird), während die von rechts gegen links ausgefüllten Zeilen ihr Ende erreicht haben, sobald der Platz unter der 0 der vorangehenden Zeile ausgefüllt ist, — so hat man den Inbegriff der einfachen Vorschriften, nach welchen sich aus dem Anfange

$$\begin{array}{cc} 1 & \\ 0 & 1 \end{array}$$

das weitere Zahlengefüge von selbst ergiebt, — zu dessen fernerer Fortsetzung man jederzeit nur die letzte vollständige Zeile nöthig hat. Darin sind die rechts heraustretenden ungeraden Zahlen 1, 1, 3, 17, 155 etc. die Bernoulli'schen Zähler D, welche der Reihe nach mit $2\,(2^2 - 1)$, $2\,(2^4 - 1)$, $2\,(2^6 - 1)$, $2\,(2^8 - 1)$ etc. dividirt werden müssen, um die Bernoulli'schen Zahlen B ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$ etc.) zu geben [4]).

Die Nenner der Form $2\,(2^{2r} - 1)$ können noch mit den zugehörigen Zählern D gemeinschaftliche Factoren enthalten, welche man a priori angeben kann, da nach Staudt der Nenner von B_r in seiner einfachsten Gestalt bekannt ist, nämlich gleich dem doppelten Producte aller ungeraden Primzahlen $2d + 1$, für welche $\frac{r}{d}$ eine ganze Zahl wird. Nennt man

4) Man kann noch im Schreiben des Tableau etwas dadurch kürzen, dass man die zwei ersten Zeilen ganz und von jeder folgenden die letzte Zahl zur Rechten weglässt. Nur müssen dann die rechts anfangenden Zeilen, statt mit Null, mit der Repetition der zuletzt vorher gebildeten Zahl begonnen werden.

dieses Product $\Pi(2d+1)$ so wird hienach

$$\frac{2^{2r}-1}{\Pi(2d+1)}$$

der gemeinschaftliche Factor sein im Zähler und Nenner des Ausdruckes

$$\frac{D_{2r-1}}{2(2^{2r}-1)} = B_r$$

Die Eigenschaft der Grössen D, in der Terminalreihe auf die entgegengesetzten Werthe zu führen, liefert eine recurrirende Gleichung, welche irgend ein D durch sämmtliche vorangehenden ausdrückt. An die Stelle derselben kann man aber die gekürzte Formel von wesentlich nur halb so vielen Gliedern und kleineren Zahlencoefficienten setzen, welche unserer Gl. VIII. für die B analog ist, und welche im gegenwärtigen Falle (noch etwas einfacher als dort) die Bedingung ausspricht, dass das mittelste oder $(r+1)$te Glied der mit D_{2r-1} beginnenden Zeile im Differenzen-Tableau gleich Null ist. Unter Voraussetzung, dass r mindestens gleich zwei ist, erhält diese abgekürzte Formel die Gestalt:

$$\text{XIII)}\quad D_{2r-1} - \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} D_{2r-3} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} D_{2r-5} - \ldots = 0$$

(links soweit fortzusetzen bis die Binominal-Coefficienten von selbst verschwinden); während D_1, welches nicht aus dieser Gleichung sich ergibt, $= 1$ ist.

Sind z. B. schon bekannt

$D_1 = 1$, $D_3 = 1$, $D_5 = 3$ so erhält man

$$D_7 = 6D_5 - D_3 = 17$$

$$D_9 = 10D_7 - 5D_5 = 155$$

$$D_{11} = 15D_9 - 15D_7 + D_5 = 2073$$

$$D_{13} = 21\,D_{11} - 35\,D_9 + 7\,D_7 = 38227$$

u. s. w.

Hiernach ist zum Beispiel die 6te Bernoulli'sche Zahl

$$B_6 = \frac{D_{11}}{2\,(2^{12} - 1)} = \frac{2073}{2 \cdot 63 \cdot 65} = \frac{691}{2730}$$

ebenso die 7te

$$B_7 = \frac{D_{13}}{2\,(2^{14} - 1)} = \frac{38227}{2 \cdot 127 \cdot 129} = \frac{7}{6}$$

Da z. B. bei dieser letzten der kleinste Nenner 6 nach der Staudt'schen Regel sofort bekannt ist, so weiss man sogleich, dass $43 \cdot 127$ als Divisor in D_{13} stecken muss.

Unter den Binomial-Coefficienten

$$\frac{r\,(r-1)}{1 \cdot 2},\ \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\,(r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},\ \ldots$$

befindet sich nothwendig eine ungerade Anzahl solcher, welche ungerade Zahlen sind, — weil ihre Summe gleich ist

$$\frac{1}{2}\Big((1+1)^r + (1-1)^r\Big) - 1 = 2^{r-1} - 1.$$

Daraus folgt, dass D_{2r-1} eine ungerade ganze Zahl sein muss, wenn sämmtliche vorangehenden D es sind; also, da schon D_1 ungerad ist, dass alle D es sein müssen. Diese bekannte Eigenschaft der Bernoulli'schen Zähler kann man in gleicher Weise durch vollständige Induction auch aus der Anordnung der Zahlen in unserem Treppen-Schema erweisen.

Der Vortheil, in der Rechnung nur mit ganzen Zahlen zu thun zu haben, ist so erheblich, dass für die numerische Berechnung der Grössen B es durchaus am bequemsten scheint, durch ihre Zähler D zu gehen, — sei es nun, dass man diese letztern aus dem Treppenschema oder aus der gekürzten recurrirenden Gleichung XIII. bildet. Von diesen beiden Wegen selbst bietet der durch die Formel den Vortheil, dass man weniger Zahlen anzuschreiben hat, — indem nämlich in der Zahlentafel zur Berechnung eines neuen D immer zwei neue Zeilen ausgefüllt werden müssen. Dem steht jedoch zu Gunsten der letzteren Rechnungsweise gegenüber, dass sie weder Multiplicationen noch auch Subtractionen erfordert, sondern nur Additionen der allerbequemsten Art. Denkt man sich, dass etwa von späteren Grössen B oder D nur die wichtigsten Ziffern berechnet werden sollen, so kann man in dem Zahlenschema von irgend welcher Zeile an eine Kürzung durch Weglassen der Endziffern vornehmen, ohne dass sich ja begeben kann, dass durch gegenseitiges Aufheben in den vorangehenden Stellen diejenigen Ziffern, die man abgestrichen hat, in die vorderen und für die beabsichtigte Genauigkeit noch relevanten Plätze einrücken. Bei der Rechnung nach der Formel hat man, wegen der Zeichenwechsel, die sie enthält, diesen Vortheil nicht in gleicher Weise.

4.

Das Differenzen-Tableau für die „Secanten-Coefficienten" ist nicht minder bemerkenswerth, als dasjenige für die Bernoulli'schen Zahlen.

Schreibt man die Secantenreihe in der Form

$$\text{XIV)}\quad \operatorname{Sec}\vartheta = U_0 + \frac{U_2}{1\cdot 2}\vartheta^2 + \frac{U_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\vartheta^4 + \ldots$$

so erhält man zwischen ihren Coefficienten U die recurrirende Gleichung

$$\text{XV)}\quad U_{2r} - \frac{2r(2r-1)}{1\cdot 2}U_{2r-2} + \frac{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}U_{2r-4} - \ldots \pm U_0 = 0$$

und hat dazu

$$U_0 = 1$$

Der verschwindende Ausdruck in ersterer Gleichung ist aber nichts anderes, als $\pm$ das mit $\pm\, U_{2r}$ zu gleicher Zeile gehörige Glied $\Delta^{2r} U_{2r}$ in der Terminalreihe zur Stammreihe

$$U_0\ ,\ 0\ ,\ -U_2\ ,\ 0\ ,\ +U_4\ ,\ 0\ ,\ -U_6\ ,\ \ldots$$

Hat man also den Anfang des Differenzen-Tableau's gebildet

$$\begin{array}{cc} 1 & \\ & -1 \\ 0 & \end{array}$$

so setzt sich dasselbe zunächst in der Terminalreihe mit 0 fort: von da wird die dritte Zeile von rechts nach links ausgefüllt, wodurch man zu dem Gliede $-U_2 = -1$ der Stammreihe kommt: das nächste Glied derselben ist 0 und von ihm aus wird die vierte Zeile ausgefüllt:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ 0 & & 0 & \\ & -1 & & +2 \\ -1 & & +2 & \\ & +1 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Da nun das 5te Glied der Terminalreihe, aus den Gliedern $U_0 \ldots U_4$ der Stammreihe entspringend, nach unserer recurrirenden Gleichung wieder 0 sein muss, so wird von ihm aus abermals eine Zeile ausgefüllt, dann die folgende wieder von der 0 aus, welche in der Stammreihe in sechster Stelle zu stehen kommt, und so immer hin und her. Auch hier wird alles sogleich definitiv ausgefüllt, — man hat nur mit ganzen Zahlen und, wie sich nach dem Anfange sogleich als durchaus geltend ergibt, nur mit Additionen zu thun. (Siehe das Tableau in Beilage 4.) Da die Glieder U_0, U_4, U_8, . . der Stammreihe sich als positiv, die Glieder $-U_2$, $-U_6$, ... sich als negativ ergeben, was offenbar in derselben Art fortgeht, so sind die Grössen U selbst alle positiv

$$U_0 = 1\ ,\ U_2 = 1\ ,\ U_4 = 5\ ,\ U_6 = 61 \quad \text{u. s. w.}$$

Bei der Betrachtung der Tafel drängt sich hier sofort die Frage auf, welches die Bedeutung der Zahlen $+2$, -16, $+272$ etc. sein mag, welche in der Terminalreihe sich zwischen die Nullen einschieben. Zu ihrer Beantwortung dient am bequemsten wieder der schon benützte Satz über den Zusammenhang zwischen der functio generatrix der Stamm- und der Terminalreihe. In unserem Falle ist zu setzen:

$$\begin{aligned}
a &= U_0 = 1\\
b &= 0\\
c &= -U_2 = -1\\
d &= 0\\
e &= +U_4 = +5\\
f &= 0\\
g &= -U_6 = -61\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und man hat, mit $y = \vartheta i$

$$f(y) = f(\vartheta i) = \sec\vartheta = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

Bezeichnet man also die Glieder der Terminalreihe wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta b &= -\ 1 = -T_1\\
\Delta c &= 0\\
\Delta d &= +\ 2 = +T_3\\
\Delta e &= 0\\
\Delta f &= -\ 16 = -T_5\\
\Delta g &= 0\\
\Delta h &= +272 = +T_7\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

so ergibt sich

$$2\,\frac{e^{-y}}{e^{y}+c^{-y}} = 1 - \frac{T_1}{1}\,y + \frac{T_3}{1\cdot 2\cdot 3}\,y^3 - \dots$$

und wenn man wieder ϑ einführt:

$$\text{XVI)}\qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{T_1}{1}\,\vartheta + \frac{T_3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\vartheta^3 + \frac{T_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\vartheta^5 + \dots$$

Es sind also die in unsrer Terminalreihe auftretenden Zahlen in demselben Summe Tangenten-Coefficienten, in welchen die Grössen U der Stammreihe Secanten-Coefficienten sind, — und beide zugleich lassen sich arithmetisch so definiren:

Wenn man eine mit 1 beginnende Stammreihe so fortsetzt, dass sie selbst an der 2ten, 4ten, 6ten etc., die zugehörige Terminalreihe aber an der 3ten 5ten, 7ten etc. Stelle Nullen enthält, so sind die Glieder ungerader Ordnungszahl in der Stammreihe Secanten-Coefficienten, und diejenigen gerader Ordnungszahl in der Terminalreihe Tangenten-Coefficienten.

Diese letztern führen wieder auf die Bernoulli'schen Zahlen zurück; nach der von uns gebrauchten Schreibweise hat man nämlich

$$\text{XVII)}\qquad T_{2r-1} = \frac{1}{r}\,2^{2r-2}\,D_{2r-1} = \frac{1}{r}\,2^{2r-1}\,(2^{2r}-1)\,B_r$$

woraus man erkennt, dass alle in r enthaltenen ungeraden Factoren in D_{2r-1} aufgehen müssen (wie sich auch in anderer Weise leicht darthun lässt), — andrerseits aber, da die D ungerade ganze Zahlen sind, dass T_{2r-1} eine Potenz von 2 als Factor enthält, deren Exponent um denjenigen der in r enthaltenen Potenz von 2 kleiner ist als $2(r-1)$.

Die Beziehung, dass, wenn die Coefficienten der Einen Art in der Stammreihe stehen, die der andern in der Terminalreihe erscheinen, ist übrigens eine reciproke; denn aus dem Zusammenhange zwischen beiden Reihen ergibt sich auch folgender allgemeine Satz [5]).

Wenn die Grössen $a, b, c, d, \ldots$ in der Stammreihe führen zu den Grössen $a, \Delta b, \Delta^2 c, \ldots$ in der Terminalreihe, so führen umgekehrt die Grössen $a, -\Delta b, +\Delta^2 c, -\Delta^3 d, \ldots$ in der Stammreihe zu den Grössen $a, -b, +c, -d, \ldots$ in der Terminalreihe.

Daher führt in unserm Falle eine mit den Tangenten-Coefficienten gebildete Stammreihe

$$1\ ,\ T_1 = 1\ ,\ 0\ ,\ -T_3 = -2\ ,\ 0\ ,\ +T_5 = +16\ ,\ \text{etc.}$$

zu der Terminalreihe mit den Secanten-Coefficienten

$$U_0 = 1\ ,\ 0\ ,\ -U_2 = -1\ ,\ 0\ ,\ +U_4 = +5\ ,\ 0\ \text{etc.}$$

zurück, welche vorher die Stammreihe war.

Bei der vollkommen analogen Rolle, welche hiernach die Zahlen in den beiden Grenzreihen der Tafel spielen, erscheint es hier doppelt indicirt, analog wie bei den Grössen D, dem Rechnungsschema die Form eines Differenzen-Tableau's abzustreifen, die Zeilen, anstatt sie schräg aufsteigen zu lassen, horizontal zu ordnen, die Zahlen, die durchaus nur mit gleichen Zeichen zu verbinden sind, nur ihren absoluten Werthen nach anzuschreiben, und überall diejenigen gerade unter einander zu bringen, welche zusammen zu addiren sind.

Die Tafel nimmt dadurch für die Rechnung die Form des doppelt treppenförmigen Schema's in Beilage 5 an. Da dasselbe in durchaus ähnlicher Weise ausgefüllt und fortgesetzt wird, wie das Schema 3 für die Grössen D, vor welchem es sogar eine noch grössere Symmetrie nach beiden Seiten voraus hat, so genügt es, zu

5) In demselben spricht sich Eine von 5 Variationen aus, die man zu einem richtig ausgefüllten Differenzen-Tableau allemal durch Umstellung seiner Zahlenreihen ableiten kann.

sagen, dass, abgesehen von den Nullen, mit welchen alternirend links und rechts die Zeilen beginnen, und abgesehen von der 1 an der Spitze, aus welcher sozusagen Alles hervorgeht, auch hier jede Zahl der Tafel die Summe ist aus der neben ihr stehenden kleineren und der gerade über dieser befindlichen. Die über den Nullen heraustretenden Endzahlen der Zeilen sind bei unserer Anordnung links Secanten-, rechts Tangenten-Coefficienten.

Durch dieses Schema kann man also zugleich Secanten-Coefficienten und Bernoulli'sche Zahlen berechnen, erhält aber die letztern allerdings nicht allein mit den Factoren $2(2^{2r}-1)$, durch welche sie auf ungerade ganze Zahlen gebracht werden, sondern ausserdem noch mit Potenzen von 2 belastet. —

Auch in dem Schema 5 würde man, ähnlich wie zu 3 erwähnt, sich Kürzungen durch Abstreichen der letzten Ziffern erlauben dürfen, wenn nur die wichtigsten Stellen jedes Coefficienten gefordert werden, — da auch hier der Fall nicht vorkommen kann, dass in den Anfangsziffern ein gegenseitiges Aufheben Statt fände. — Uebrigens könnte man auch hier, zur Abkürzung im Schreiben, am Ende jeder Zeile die Wiederholung der letzten Zahl und am Anfang der nächstfolgenden die Null weglassen, wenn man dafür zur Regel machen würde, jede neue Zeile unter der letzten Zahl der vorangehenden mit der Repetition dieser letzteren zu beginnen.

Die Annahme wird kaum unberechtigt sein, dass die in den vorstehenden §§ aufgestellten Formeln und Rechnungs-Vorschriften für die Bernoulli'schen und die diesen verwandten Zahlen die einfachsten sind, welche man bis jetzt besitzt; namentlich möchte dies von den auf die halbe Zahl der Glieder reducirten recurrirenden Gleichungen für die

Bernoulli'schen Zahlen in § 2 VI.—VIII. und für ihre Zähler D in § 3. XIII, andererseits aber von dem Treppenschema zur Berechnung dieser letzteren (§ 3) und von dem doppelten für die Secanten- und Tangenten-Coefficienten (§ 4) gelten. Grösseres Interesse jedoch, als der Vortheil welcher hieraus für die Durchführung von Rechnungen oder Entwickelungen unter Umständen sich ergeben könnte, darf vielleicht der Nachweis in Anspruch nehmen, dass jene eigenthümlichen und in so verschiedenartigen Entwicklungen auftretenden Zahlen-Folgen nicht blos privilegirt sind durch ihre Rolle in der Analysis, sondern auch ausgezeichnet durch ihre arithmetische Natur selbst, vermöge deren sie sich in einfacher und doch charakteristischer Weise sozusagen von selbst aus den Grund-Elementen 1 und 0 aller Zahlenbetrachtung entfalten.

Beilage I.

Differenzen-Tableau der Bernoulli'schen Zahlen.

	1											
		$-\frac{1}{2}$										
	$\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{6}$									
		$-\frac{1}{3}$		0								
$B_1 =$	$\frac{1}{6}$		$+\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{30}$							
		$-\frac{1}{6}$		$-\frac{1}{30}$		0						
	0		$+\frac{2}{15}$		$-\frac{1}{30}$		$+\frac{1}{42}$					
		$-\frac{1}{30}$		$-\frac{1}{15}$		$+\frac{1}{42}$		0				
$-B_2 =$	$-\frac{1}{30}$		$+\frac{1}{15}$		$-\frac{1}{105}$		$+\frac{1}{42}$		$-\frac{1}{30}$			
		$+\frac{1}{30}$		$-\frac{8}{105}$		$+\frac{1}{21}$		$-\frac{1}{30}$		0		
	0		$-\frac{1}{105}$		$+\frac{4}{105}$		$-\frac{1}{105}$		$-\frac{1}{30}$		$+\frac{5}{66}$	
		$+\frac{1}{42}$		$-\frac{4}{105}$		$+\frac{4}{105}$		$-\frac{1}{15}$		$+\frac{5}{66}$		0
$B_3 =$	$\frac{1}{42}$		$-\frac{1}{21}$		$+\frac{8}{105}$		$-\frac{8}{105}$		$+\frac{7}{165}$		$+\frac{5}{66}$	
		$-\frac{1}{42}$		$+\frac{4}{105}$		$-\frac{4}{105}$		$-\frac{4}{165}$		$+\frac{5}{33}$		
	0		$-\frac{1}{105}$		$+\frac{4}{105}$		$-\frac{116}{1155}$		$+\frac{32}{165}$			
		$-\frac{1}{30}$		$+\frac{8}{105}$		$-\frac{32}{231}$		$+\frac{28}{165}$				
$-B_4 =$	$-\frac{1}{30}$		$+\frac{1}{15}$		$-\frac{116}{1155}$		$+\frac{16}{231}$					
		$+\frac{1}{30}$		$-\frac{4}{165}$		$-\frac{16}{231}$						
	0		$+\frac{7}{165}$		$-\frac{28}{165}$							
		$+\frac{5}{66}$		$-\frac{32}{165}$								
$B_5 =$	$\frac{5}{66}$		$-\frac{5}{33}$									
		$-\frac{5}{66}$										
	0											

Beilage 5.

Doppel-Treppen-Schema

für die Berechnung der Secanten-Coefficienten U und der Tangenten-Coefficienten T.

Abgesehen von der 1 an der Spitze, und von den Nullen, mit welchen die Zeilen abwechselnd links und rechts beginnen, ist jede Zahl der Tafel die Summe aus der neben ihr stehenden kleinern, und der gerade über der letztern befindlichen.

$$\operatorname{Sec}\vartheta = U_0 + \frac{U_2}{1\cdot 2}\vartheta^2 + \frac{U_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\vartheta^4 + \ldots$$

$$\operatorname{Tng}\vartheta = \frac{T_1}{1}\vartheta + \frac{T_3}{1\cdot 2\cdot 3}\vartheta^3 + \frac{T_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\vartheta^5 + \ldots.$$

$$T_{2r-1} = \frac{1}{r}2^{2r-2}D_{2r-1} = \frac{1}{r}2^{2r-1}(2^{2r}-1)B_r$$

					$U_0 =$	1							
						0	1	$= T_1$					
				$U_2 =$	1	1	0						
					0	1	2	2	$= T_3$				
			$U_4 =$	5	5	4	2	0					
				0	5	10	14	16	16	$= T_5$			
		$U_6 =$	61	61	56	46	32	16	0				
			0	61	122	178	224	256	272	272	$= T_7$		
	$U_8 =$	1385	1385	1324	1202	1024	800	544	272	0			
		0	1385	2770	4094	5296	6320	7120	7664	7936	7936	$= T_9$	
$U_{10} =$	50521	50521	49136	46366	42272	36976	30656	23536	15872	7936	0		
	0	50521	101042	150178	196544	238816	275792	306448	329984	345856	353792	353792	$= T_{11}$

r Tangenten-Coefficienten T.

ıen die Zeilen abwechselnd links und rechts leinern, und der gerade über der letztern

$$\frac{1}{}\vartheta + \frac{T_3}{1\cdot 2\cdot 3}\vartheta^3 + \frac{T_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\vartheta^5 + \dots$$

$$= \frac{1}{r}\, 2^{2r-2} D_{2r-1} = \frac{1}{r}\, 2^{2r-1}\left(2^{2r}-1\right) B_r$$

$= T_3$				
16	$= T_5$			
0				
272	272	$= T_7$		
272	0			
7664	7936	7936	$= T_9$	
15872	7936	0		
329984	345856	353792	353792	$= T_{11}$

Beilage 2.

Differenzen-Tableau der Bernoulli'schen Zähler

$$D_{2r-1} = 2\,(2^{2r} - 1)\, B_r$$

	0										
		1									
	1		− 1								
		0		0							
$D_1 =$	1		− 1		+ 1						
		− 1		+ 1		0					
	0		0		+ 1		− 3				
		− 1		+ 2		− 3		0			
$-D_3 = -$	1		+ 2		− 2		− 3		+ 17		
		+ 1		0		− 6		+ 17		0	
	0		+ 2		− 8		+ 14		+ 17		− 155
		+ 3		− 8		+ 8		+ 34		− 155	
$D_5 = +$	3		− 6		0		+ 48		− 138		
		− 3		− 8		+ 56		− 104			
	0		− 14		+ 56		− 56				
		− 17		+ 48		0					
$-D_7 = -$	17		+ 34		+ 56						
		+ 17		+ 104							
	0		+ 138								
		+ 155									
$D_9 = +$	155										

$$\mathrm{tg.}\frac{1}{2}\vartheta = \frac{D_1}{1 \cdot 2}\vartheta + \frac{D_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\vartheta^3 + \dots$$

Beilage 3.

Treppen-Schema

für die Berechnung der Bernoulli'schen Zähler

$$D_{2r-1} = 2\,(2^{2r} - 1)\,B_r$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{D_1}{1 \cdot 2} \vartheta + \frac{D_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \vartheta^3 + \ldots$$

Abgesehen von der Spitze 1 und von den Nullen, mit welchen alterirend links und rechts die Zeilen beginnen, ist jede Zahl der Tafel die Summe aus der neben ihr stehenden kleineren und der gerade über dieser befindlichen.

1								
0	1 = D_1							
1	0							
0	1	1 = D_3						
2	1	0						
0	2	3	3 = D_5					
8	6	3	0					
0	8	14	17	17 = D_7				
56	48	34	17	0				
0	56	104	138	155	155 = D_9			
608	552	448	310	155	0			
0	608	1160	1608	1918	2073	2073 = D_{11}		
9440	8832	7672	6064	4146	2073	0		
0	9440	18272	25944	32008	36154	38227	38227 = D_{13}	

Beilage 4.

Differenzen-Tableau

der Secanten-Coefficienten U.

$$\operatorname{Sec}\vartheta = U_0 + \frac{U_2}{1\cdot 2}\vartheta^2 + \frac{U_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\vartheta^4 + \dots$$

$U_0 =$	1								
		− 1							
	0		0						
		− 1		+ 2					
$-U_2 =$	− 1		+ 2		0				
		+ 1		+ 2		− 16			
	0		+ 4		− 16		0		
		+ 5		− 14		− 16		+ 272	
$U_4 =$	+ 5		− 10		− 32		+ 272		0
		− 5		− 46		+ 256		+ 272	
	0		− 56		+ 224		+ 544		
		− 61		+ 178		+ 800			
$-U_6 =$	− 61		+ 122		+ 1024				
		+ 61		+ 1202					
	0		+ 1324						
		+ 1385							
$U_8 =$	+ 1385								