

THESE

présentée par

Yann MENGUY

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

(Arrêtés Ministériels du 5 juillet 1984 et
du 30 mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Optimisation quadratique et géométrie de problèmes de dosimétrie inverse

Date de soutenance : 25 Janvier 1996

Composition du jury:

| | |
|---------------|--------------------------------------|
| Président : | P.-J. Laurent |
| Rapporteurs : | J.-D. Boissonnat C. Carasso |
| Examineurs : | M. Bolla P. Cinquin B. Lacolle |

Thèse préparée au sein du laboratoire TIMC - IMAG

Remerciements

C'est avec l'enthousiasme qui lui est propre que Philippe Cinquin m'a accueilli dans l'équipe GMCAO du Laboratoire TIMC. Pendant toute la durée de cette thèse, il m'a témoigné sans cesse une grande confiance et a toujours su me communiquer son exceptionnel optimisme. Je tiens donc à lui témoigner ma gratitude la plus sincère.

Je remercie également tous les membres du jury de s'être intéressés à mon travail et d'avoir participé à la soutenance.

Jocelyne Troccaz est responsable du projet "radiothérapie" dans lequel s'inscrit ce travail. Je la remercie profondément pour sa gentillesse, son soutien constant et sa grande disponibilité. J'aimerais joindre à ces remerciements tous mes collègues de l'équipe GMCAO, avec qui j'ai pu travailler dans une très bonne ambiance : Agnès, Ali, Cathy, Corinne, Delphine, Eric Ba. et Bi., Frank, Guillaume, Ivan, Laurent, Mâhnu, Maribel, Noureddine, Olivier, Pascal, Sandrine, Steph, Véro, Vincent, Yves.

Je pense également à tous mes amis du Service de Radiothérapie où j'ai travaillé deux années durant. Ils m'ont non seulement transmis leurs connaissances et aidé pour les diverses expérimentations, mais aussi intégré véritablement au sein de leur groupe. Merci du fond du cœur à Alain, Andrée, Annie, Christiane, Jean-Yves, Louise et Patrick.

Je remercie enfin mes parents d'avoir été toujours attentifs au cours de mes études et j'exprime ma plus profonde reconnaissance à ma sœur Aela pour m'avoir soutenu sans relâche.

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| INTRODUCTION | 9 |
| 1 Rappels de médecine et de radiophysique | 13 |
| 1.1 Rappels de médecine | 13 |
| 1.1.1 Anatomie de la région prostatique | 13 |
| 1.1.2 Le cancer de la prostate | 14 |
| 1.1.2.1 Données épidémiologiques | 14 |
| 1.1.2.2 Le diagnostic | 14 |
| 1.1.2.3 Le traitement | 15 |
| 1.2 Rappels de radiophysique | 16 |
| 1.2.1 La production des rayons X | 16 |
| 1.2.2 L'interaction des photons avec la matière | 18 |
| 1.2.2.1 L'effet Compton | 19 |
| 1.2.2.2 Perspectives médicales | 19 |
| 1.2.3 La radiothérapie | 20 |
| 1.2.3.1 Dosimétrie et balistique | 20 |
| 1.2.3.2 Distribution de la dose dans le temps | 23 |
| 1.3 Conclusion : l'irradiation de la prostate | 23 |
| 2 La dosimétrie directe | 25 |
| 2.1 Introduction | 25 |
| 2.2 Les différentes méthodes de calcul de dose | 25 |
| 2.2.1 Les méthodes à caractère physique | 25 |
| 2.2.1.1 La séparation primaire-diffusé (méthode de Clarkson) | 25 |
| 2.2.1.2 La convolution de kernels | 26 |
| 2.2.1.3 Les méthodes de Monte Carlo | 27 |
| 2.2.2 Les méthodes à caractère mathématique et informatique | 28 |
| 2.2.2.1 Le stockage informatique des données | 28 |
| 2.2.2.2 La modélisation analytique de la dose | 29 |
| 2.2.3 Conclusion | 30 |
| 2.3 La méthode de Clarkson | 31 |
| 2.3.1 La séparation primaire-diffusé pour des champs circulaires | 32 |
| 2.3.2 Cas des champs de forme complexe | 33 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.3.2.1 | Calcul de la dose diffusée | 33 |
| 2.3.2.2 | Calcul de la dose primaire | 34 |
| 2.3.2.3 | Calcul de la dose totale | 35 |
| 2.3.3 | La correction d'obliquité | 36 |
| 2.3.4 | Exemples | 38 |
| 2.3.4.1 | La méthode de Clarkson | 38 |
| 2.3.4.2 | La correction d'obliquité | 41 |
| 2.4 | Modélisation d'un faisceau par fonctions spline | 41 |
| 2.4.1 | Rappels : approximations et fonctions spline en dimensions 1 et 2 | 43 |
| 2.4.1.1 | En dimension 1 | 43 |
| 2.4.1.2 | En dimension 2 | 44 |
| 2.4.1.3 | Conclusion | 46 |
| 2.4.2 | Une méthode pour la dimension 3 | 46 |
| 2.4.3 | Mise en œuvre | 48 |
| 2.4.3.1 | Construction du modèle de dose | 48 |
| 2.4.3.2 | Résultats | 51 |
| 2.4.4 | Conclusion | 60 |
| 3 | Le problème de la plus petite boule englobante | 61 |
| 3.1 | Introduction | 61 |
| 3.2 | Présentation et données bibliographiques | 62 |
| 3.3 | L'algorithme de Chrystal-Peirce | 66 |
| 3.4 | Généralisation de l'algorithme de Chrystal-Peirce au cas multidimensionnel | 69 |
| 3.4.1 | Notations et définitions | 70 |
| 3.4.2 | Résultats préliminaires | 70 |
| 3.4.2.1 | Caractérisation de la solution | 70 |
| 3.4.2.2 | Autres résultats et corollaires | 73 |
| 3.4.3 | L'algorithme | 74 |
| 3.4.4 | Convergence de l'algorithme | 78 |
| 3.4.5 | Mise en œuvre | 80 |
| 3.4.5.1 | Implémentation | 80 |
| 3.4.5.2 | Résultats | 82 |
| 3.5 | Approche analytique du problème de la plus petite boule englobante | 88 |
| 3.5.1 | Généralités | 88 |
| 3.5.1.1 | Cas différentiable | 90 |
| 3.5.1.2 | Cas non différentiable | 91 |
| 3.5.2 | Borne supérieure de fonctions convexes différentiables | 95 |
| 3.5.2.1 | Cas général | 95 |
| 3.5.2.2 | Retour au problème de la plus petite boule englobante | 96 |
| 3.5.2.3 | Conclusion | 98 |
| 3.5.3 | Mise en œuvre de l'algorithme de sous-gradient normalisé | 99 |
| 3.5.3.1 | Exemple d'une fonction à variable réelle | 99 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.5.3.2 | Application au problème de la plus petite boule englobante | 101 |
| 3.6 | Conclusion | 101 |
| 4 | L'optimisation dosimétrique | 103 |
| 4.1 | Introduction | 103 |
| 4.2 | Données bibliographiques | 104 |
| 4.2.1 | Des approches continues | 104 |
| 4.2.1.1 | Une solution analytique | 104 |
| 4.2.1.2 | Utilisation des kernels de dose | 106 |
| 4.2.2 | Des approches discrètes | 107 |
| 4.2.2.1 | Utilisation de la décomposition en valeurs singulières | 107 |
| 4.2.2.2 | Utilisation de l'algorithme de Cimmino | 108 |
| 4.3 | Formalisation mathématique | 108 |
| 4.3.1 | Choix du protocole | 109 |
| 4.3.2 | Formulation du problème | 110 |
| 4.3.3 | Discrétisation du problème | 112 |
| 4.4 | Mise en œuvre | 113 |
| 4.4.1 | La démarche globale | 114 |
| 4.4.1.1 | Les données d'imagerie et leur pré-traitement | 114 |
| 4.4.1.2 | Le choix des faisceaux | 117 |
| 4.4.1.3 | L'optimisation | 118 |
| 4.4.1.4 | L'évaluation des résultats | 119 |
| 4.4.2 | Les résultats | 120 |
| 4.4.2.1 | Le traitement actuel | 120 |
| 4.4.2.2 | Influence de la géométrie des faisceaux | 121 |
| 4.4.2.3 | Influence des différents paramètres | 123 |
| 4.5 | Conclusion | 124 |
| | CONCLUSION | 131 |
| | BIBLIOGRAPHIE | 133 |

Introduction

Dans *Le pavillon des cancéreux*, roman autobiographique dont l'action se déroule au Kazakhstan en 1955, Soljénitsyne décrit de manière saisissante l'univers de la cancérologie. L'écrivain, qui fut d'abord physicien, y définit également avec une grande justesse le principal problème de la radiothérapie, qui reste entièrement d'actualité :

“Le problème le plus important, ici, le plus dangereux et le plus mal connu était de veiller à un dosage précis des rayons. Il n'existait pas de formule permettant de calculer l'intensité et la dose de rayons les plus mortelles pour chaque tumeur et les moins nocives pour le reste du corps ; une telle formule n'existait pas ; en revanche il y avait une certaine part d'expérience, un certain flair, et aussi la possibilité de se référer à l'état du malade. Il s'agissait, là aussi, d'une opération aux rayons, menée à l'aveuglette, étirée dans le temps. Il était impossible de ne pas léser, de ne pas détruire des cellules saines.”

Les rayonnements ionisants (rayons X, rayons γ , etc.) ont pour principal effet de délivrer de l'énergie aux corps qui leur sont exposés. La radiothérapie est basée sur l'utilisation de ces densités massiques d'énergie, communément appelées doses, pour détruire les tumeurs cancéreuses. Cette technique, en comparaison à la chirurgie, présente l'énorme avantage d'être non invasive, et de ne nécessiter, sauf cas exceptionnels, ni anesthésie, ni hospitalisation. Cependant, comme en témoigne le texte de Soljénitsyne, les rayons sont loin d'être aussi bien contrôlés qu'un bistouri par un chirurgien. Lors d'une irradiation, en effet, chaque partie du corps reçoit une certaine dose, aussi réduite soit elle : il est donc indispensable, avant le traitement, d'optimiser la distribution de dose en fonction de sa cohérence radiobiologique.

Ainsi, la tumeur et les zones à risque d'extension sont des tissus ciblés, et doivent nécessairement recevoir une dose minimale prescrite par le praticien. Les tissus sains, au contraire, sont protégés en fonction de leur radiosensibilité. La moelle épinière, par exemple, est un tissu extrêmement radiosensible, dont une irradiation excessive est quasiment synonyme de paralysie. D'autres tissus (vessie, rectum, etc.) présentent souvent des inflammations qui, sans constituer un véritable danger pour le patient, lui sont réellement inconfortables.

En pratique, l'étude dosimétrique pré-opératoire est réalisée par un radiophysicien, et consiste à déterminer une balistique de traitement qui satisfasse au mieux les différentes contraintes. Le radiophysicien commence par choisir une balistique qui lui semble convenir et calcule la répartition de dose correspondante : il procède ensuite par modifications successives jusqu'à obtenir une dosimétrie satisfaisante. Une telle approche est, en partie, basée sur l'expérience et l'intuition du physicien. Si elle permet un traitement médicalement *correct*, elle ne peut, cependant, mener à une répartition de dose à proprement parler *optimale*. Le problème de *dosimétrie inverse* correspond au problème inverse suivant : supposons donnée une répartition tridimensionnelle de dose, souhaitée par le praticien. Il s'agit de déterminer les balistiques d'irradiation dont l'application donne lieu à cette répartition.

Nous effectuons, dans un premier chapitre, une introduction à la médecine et à la radiophysique. D'un point de vue médical, nous nous intéresserons exclusivement au cancer de la prostate, l'un des plus fréquents, et pour lequel les médecins ont estimé que le traitement radiothérapique pouvait être nettement amélioré. Nous décrivons les bases physiques de la radiothérapie et définissons la terminologie correspondante, utile pour la suite.

Le calcul de la dose, étape obligée avant l'optimisation de la balistique, est rendu délicat par la complexité de l'interaction des rayonnements avec la matière. Le Chapitre 2 présente, en premier lieu, les nombreuses méthodes existant actuellement, qui continuent toujours d'évoluer. Nous avons implémenté l'une d'elles, la méthode de Clarkson, basée sur la séparation de la dose primaire et de la dose diffusée.

Dans le cas d'un faisceau à section circulaire fixée, afin d'obtenir une méthode plus rapide, nous avons ensuite construit un modèle dosimétrique basé sur un lissage tridimensionnel, par fonctions spline, de mesures de dose. Le résultat est comparé à une simple interpolation sur ces données.

Bien que le Chapitre 3 prenne son point de départ dans le domaine de la radiothérapie, il représente incontestablement une digression. En effet, dans le but d'automatiser le centrage de la cible, nous avons traité, de manière approfondie, le problème consistant à déterminer la plus petite boule contenant un ensemble fini de points. Dans un premier temps, nous survolons l'énorme bibliographie de ce problème.

Nous présentons un algorithme centenaire, l'algorithme de Chrystal-Peirce, qui traite le problème en dimension 2. Nous construisons ensuite une généralisation en dimension quelconque, et montrons que l'algorithme obtenu converge en un nombre fini d'itérations.

Nous exposons enfin l'interprétation analytique du problème et montrons que notre algorithme, sous sa forme géométrique, est en fait un algorithme de plus grande pente à pas optimal.

Le dernier chapitre est consacré à l'optimisation de la dose. Nous y présentons, dans une partie bibliographique, plusieurs approches de ce problème, qui utilisent des méthodes mathématiques variées. Nous choisissons, ensuite, notre formalisme en définissant un espace des paramètres, une fonctionnelle à minimiser, et des contraintes à réaliser. Les résultats médicaux sont enfin présentés.

Chapitre 1

Rappels de médecine et de radiophysique

1.1 Rappels de médecine

1.1.1 Anatomie de la région prostatique

La *prostate* (19) est une masse glandulaire, constituée d'une quarantaine de glandes, de consistance assez ferme, et qui a la taille et la forme d'une châtaigne. Elle est située sous le fond de la *vessie* (18), cavité pouvant contenir jusqu'à 700 ml d'urine, et dont la forme est à peu près celle d'un coussin ovale et aplati. Sur l'arrière de la vessie sont placées deux glandes, les *vésicules séminales* (17). Vessie, prostate, et vésicules séminales se situent en arrière de la *symphyse pubienne* (3), qui relie les deux *os iliaques*, et en avant du *rectum* (21). Ce dernier, qui se prolonge avec le *canal anal*, constitue la fin du *gros intestin*.

Figure 1.1: Coupe sagittale des organes pelviens et génitaux masculins (d'après [KLP89])

1.1.2 Le cancer de la prostate

1.1.2.1 Données épidémiologiques

Le cancer de la prostate est un cancer fréquent : on estime à environ 200 000 le nombre de nouveaux cas déclarés dans le monde chaque année, ce qui place cette maladie au cinquième rang des cancers masculins, au second rang dans les pays industrialisés. Les taux les plus élevés s'observent aux Etats-Unis (75 pour 100 000 habitants), les plus faibles dans les populations asiatiques (3 au Japon), alors que l'Europe, à l'exception de la Scandinavie, présente des taux intermédiaires (entre 10 et 40, en particulier 23 pour la France).

En termes de mortalité, les taux les plus élevés avoisinent 20 pour 100 000 habitants (Scandinavie). En France, avec un taux de mortalité de 15 (7112 décès déclarés en 1982), le cancer de la prostate occupe le second rang des décès par cancer chez l'homme après le cancer du poumon et avant le cancer colo-rectal. Sa progression, estimée sur la période de 1955 à 1980, est de 11,5%, et semble donc tout à fait modérée en comparaison à celle des bronches (102%) et de la vessie (75%).

Il est à noter, enfin, l'importance de l'âge pour le cancer de la prostate. La maladie, considérée comme rare avant 50 ans, présente une fréquence de 30% entre 50 et 59 ans, qui augmente ensuite jusqu'à 67% entre 80 et 89 ans. On estime cependant que 90% des cancers prostatiques survenant chez des hommes de plus de 70 ans ne seront pas diagnostiqués.

1.1.2.2 Le diagnostic

Les symptômes révélateurs d'un cancer de la prostate sont très souvent des troubles mictionnels. On distingue trois principaux degrés d'extension de la maladie. Le stade *local* correspond à un volume tumoral inclus dans la prostate, et, éventuellement, à un franchissement se limitant aux vésicules séminales. Le stade *régional* voit apparaître un envahissement d'une partie de la vessie et des ganglions lymphatiques. Le stade *généralisé*, enfin, correspond aux métastases, qui apparaissent généralement à l'os, aux poumons, et au foie. Tout ceci justifie la pratique systématique d'un bilan d'extension de la maladie.

Le médecin dispose, au niveau local, de plusieurs moyens de diagnostic :

- le *toucher rectal* a pour but de découvrir et de localiser, en palpant à travers la paroi rectale, une lésion de la prostate.
- l'*antigène prostatique spécifique* (APS) est une molécule présente dans le liquide séminal et dans le sang, dont le taux sérique normal est inférieur à 2,5 ng/ml. Au delà de 10 ng/ml, on soupçonne fortement un cancer prostatique, et le taux d'APS, qui peut aller jusqu'à 100 ng/ml est alors très utile pour surveiller l'évolution de la maladie.

- l'*échographie endorectale* permet de détecter des irrégularités ou des lésions de la prostate.
- la *biopsie prostatique*, effectuée grâce à une aiguille guidée par échographie, a pour but d'apporter la preuve histologique du cancer de la prostate. De plus, elle permet de classer la tumeur en lui attribuant un score : le *Gleason*.

Ces examens sont en fait complémentaires. En effet, le toucher rectal et l'échographie endorectale peuvent ne révéler que des calcifications laissées par des pathologies antérieures, passées inaperçues. De même, le taux d'APS peut n'être élevé que de manière transitoire, suite à une pathologie bénigne ou même à un simple toucher rectal. Il est clair que le diagnostic formel du cancer de la prostate provient essentiellement de la biopsie : celle-ci ne sera cependant jamais pratiquée avant le toucher rectal, qui fournit souvent de riches informations quant à la localisation de la tumeur, et reste le principal examen clinique.

On notera que les deux puissants moyens d'imagerie que sont la tomodensitométrie (scanner) et l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) ne sont, pour le diagnostic du cancer de la prostate, que d'une très faible utilité, si ce n'est lors du bilan d'extension, afin de déterminer d'éventuelles métastases osseuses ou pulmonaires. Ce même bilan d'extension peut donner lieu à l'utilisation de l'urographie et de la scintigraphie.

1.1.2.3 Le traitement

De manière générale, le traitement d'un cancer de la prostate dépend du bilan d'extension de la maladie. Ce traitement peut être curatif pour un stade local, et parfois régional, mais sera seulement palliatif pour une tumeur trop étendue ou métastatique. Par ailleurs, le cancer prostatique ayant souvent une évolution très lente, le traitement n'est pas systématiquement déclenché au diagnostic, en particulier pour des patients âgés et exposés à un décès rapide.

Dans le cas d'un cancer suffisamment localisé, deux traitements sont habituellement pratiqués :

- la *prostatectomie radicale* consiste à enlever la prostate et les vésicules séminales. Elle est accompagnée d'un curage des ganglions lymphatiques dans le but d'un examen histologique, et ainsi, d'une évaluation du stade de la maladie.
- la *radiothérapie* emploie les propriétés des rayonnements ionisants pour soigner les tumeurs. Il peut s'agir de radiothérapie *externe*, utilisant les rayons X, ou, dans le cas de tumeurs très peu volumineuses, de *curiethérapie*, qui consiste à implanter de l'iode 125 radioactif dans la prostate.

Si le bilan de la maladie révèle une tumeur assez étendue, voire métastatique, le traitement hormonal s'impose. Celui-ci est basé sur la notion d'*hormono-dépendance* du cancer de la prostate, et a pour but de réduire autant que possible le taux d'androgènes dans le sang. Pour cela, on dispose principalement de deux moyens :

- la *castration chirurgicale* provoque l'effondrement du taux de *testostérone*, qui est le principal androgène.
- des *agents chimiques* peuvent, soit s'opposer à la synthèse testiculaire des androgènes, soit inhiber le métabolisme des androgènes déjà présents dans le sang.

Cependant, dans bien des cas, l'effet du traitement hormonal n'est que temporaire, et la maladie reprend tôt ou tard, malgré un taux de testostérone minimal. C'est la phase d'échappement, où seul subsiste réellement le traitement des douleurs. On considère alors que 80% des patients vont mourir dans les deux ans, et que 10% seulement seront vivants dans cinq ans.

1.2 Rappels de radiophysique

Les deux principaux faisceaux de photons utilisés en médecine sont les rayons X et les rayons γ . Dans le domaine médical, les photons X sont créés artificiellement (découverte de Roentgen en 1895), alors que les rayons γ sont émis par des corps radioactifs. Les rayons γ , avec une énergie pouvant dépasser le MeV, ont longtemps été considérés comme les plus puissants, mais ce n'est plus le cas de nos jours, puisque nous disposons d'appareils pouvant facilement produire des rayons X de plusieurs dizaines de MeV. De plus, les sources γ , dont le cobalt 60 est un exemple fréquent, doivent être protégées en permanence, et ont une activité qui décroît avec le temps. Tout ceci explique que les rayons X commencent actuellement à prendre un pas définitif sur les rayons γ .

1.2.1 La production des rayons X

Le principe physique des rayons X consiste à accélérer des électrons sur une cible matérielle. Les rayons X résultent alors de deux types d'interactions avec les atomes de cette cible :

- un électron interagissant avec un *noyau* de la cible subit une force d'attraction coulombienne et voit sa trajectoire incurvée. Ce phénomène s'accompagne d'une perte d'énergie cinétique et, donc, de l'émission d'un photon. Ce rayonnement est le *rayonnement de freinage*, également connu sous le nom de *Bremsstrahlung*.
- un électron incident peut également percuter et éjecter l'électron d'un atome cible. Il est ainsi créé un ion excité, dont le retour à l'état fondamental se traduit par l'émission d'un photon. L'énergie de ce photon ne pouvant prendre que des valeurs quantifiées qui dépendent de l'atome cible, ce rayonnement est parfois appelé *rayonnement caractéristique*.

L'énergie cinétique des électrons incidents est principalement transformée en photons X, mais également en chaleur. On montre par ailleurs que le rendement du rayonnement de freinage est proportionnel au numéro atomique de la cible. Le *tungstène*, de numéro atomique 74, de point de fusion 3370°C , et d'excellente conductivité thermique, représente en fait le meilleur compromis pour toutes ces contraintes, et est actuellement le matériau le plus employé pour la cible.

Les appareils permettant la production des rayons X sont généralement constitués d'une enceinte dans laquelle règne un vide poussé, où les électrons sont produits par effet thermoélectronique en chauffant un filament, avant d'être accélérés vers la cible. C'est la méthode d'accélération qui différencie ces appareils, dont on distinguera principalement :

- *le tube de Coolidge* (cf. Fig. 1.2) : le filament jouant le rôle de cathode et la cible celui d'anode, on applique entre ces deux bornes un potentiel positif : sous l'action du champ électrique ainsi créé, les électrons sont accélérés vers la cible. Pour des tensions avoisinant les 200 000 V, ils acquièrent ainsi une énergie de 200 keV.

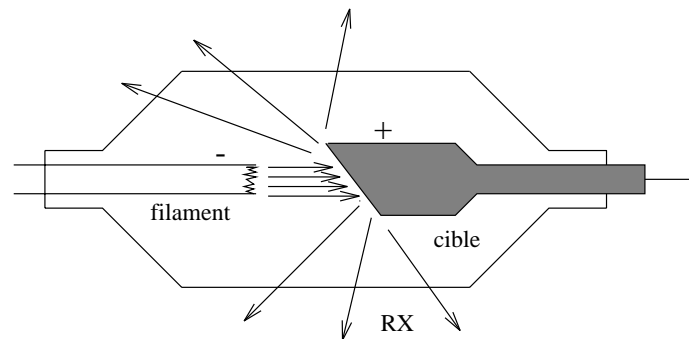


Figure 1.2: Tube de Coolidge

- *l'accélérateur linéaire* (cf. Fig. 1.3) : il s'agit là encore d'une accélération électrique. L'appareil est constitué d'une série d'électrodes cylindriques reliées à un générateur alternatif, et dans lesquelles règne un potentiel uniforme. La longueur des électrodes est calculée de sorte qu'un électron sortant de l'une d'elles (où il s'est déplacé à vitesse constante) trouve une différence de potentiel qui l'accélère vers la suivante. Les électrons subissent ainsi une série d'accéléérations vers la cible, et atteignent habituellement une énergie allant jusqu'à 40 MeV.

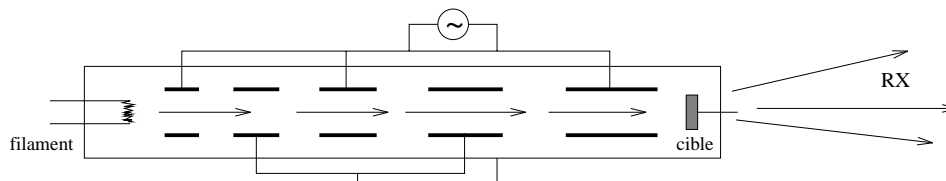


Figure 1.3: Accélérateur linéaire

- *le bétatron* (cf. Fig. 1.4) : il s'agit d'un accélérateur magnétique. L'enceinte sous vide a cette fois la forme d'un tore, et un champ magnétique alternatif est créé par un électro-aimant. Les électrons injectés dans le tore ont une trajectoire circulaire et sont accélérés : lorsqu'ils ont une énergie maximale, qui peut s'élever à 100 MeV, un champ magnétique supplémentaire les fait "déraper" de leur trajectoire et les envoie vers une cible de platine.

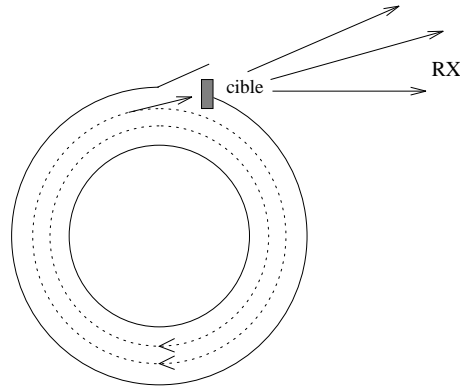


Figure 1.4: Bétatron

Pour l'accélérateur linéaire comme pour le bétatron, les électrons sont injectés à intervalles réguliers, suivant la fréquence du courant d'alimentation : l'émission de rayons X est alors discontinue.

Par ailleurs, pour les faibles énergies (tube de Coolidge), les rayons X sont émis de manière quasi-isotrope autour de la cible, alors que pour des énergies élevées (accélérateur linéaire, bétatron), ils sont émis principalement dans la direction du faisceau incident. Le faisceau final s'obtient en utilisant un diaphragme, supposé arrêter tous les photons qui le frappent. La cible étant souvent de faibles dimensions, la source peut alors être considérée comme quasi-ponctuelle (cf. Fig. 1.5).

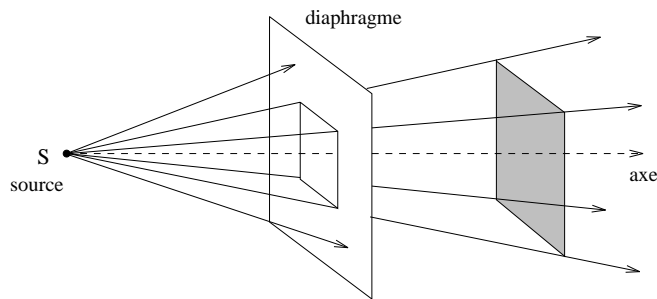


Figure 1.5: Faisceau de photons. Section du faisceau à une distance donnée.

1.2.2 L'interaction des photons avec la matière

Il existe, de manière générale, cinq interactions possibles entre les photons (qu'il s'agisse de photons X ou γ) et la matière. Nous ne décrivons cependant que l'une d'elles, l'*effet*

Compton, largement majoritaire dans le domaine médical.

1.2.2.1 L'effet Compton

L'effet Compton est une interaction entre un photon incident et un électron du milieu irradié. Le photon percute l'électron et le projette en lui communiquant une partie de son énergie ; il repart dans une direction faisant un angle θ avec la direction incidente (cf. Fig. 1.6). En traitant ce problème par la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie, on parvient aux relations de Compton, dont on déduit que l'électron est toujours projeté "en avant", alors que le photon peut repartir dans une direction quelconque.

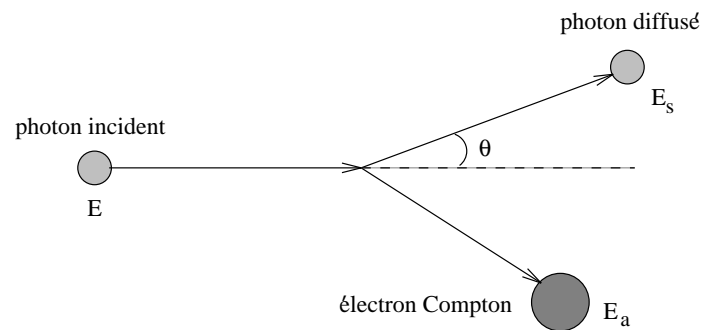


Figure 1.6: Effet Compton

Dans un milieu irradié par un faisceau de photons, on distinguera ainsi les photons *primaires*, qui n'ont subi aucune interaction, des photons *diffusés*, apparus au cours d'un effet Compton. L'effet Compton est finalement lié à trois phénomènes clairement définis :

- l'*atténuation* est la diminution du nombre de photons primaires;
- la *diffusion* est l'apparition de photons diffusés;
- l'*absorption* est le transfert d'énergie aux électrons Compton, qui l'épuisent par chocs successifs contre les atomes et la communiquent ainsi à la matière.

1.2.2.2 Perspectives médicales

L'interaction des faisceaux de photons avec la matière trouve, avec le *radiodiagnostic* et la *radiothérapie*, deux de ses principales applications, découvertes dès la fin du siècle dernier et utilisées peu après.

Le radiodiagnostic est basé sur le phénomène d'atténuation : un faisceau de photons traversant le corps humain est plus ou moins atténué selon les tissus qu'il traverse. La plupart des tissus, dont la masse volumique est proche de celle de l'eau, présente une atténuation homogène. Toutefois, l'atténuation de la graisse et des os est plus élevée,

alors que celle des cavités aériennes et des poumons est plus faible. Ainsi, l'image "radiante" transportée par le faisceau de photons présente des contrastes, matérialisés lors de sa transformation en image "lumineuse". Pour cela, on utilise, par exemple, un film radiographique (radiographie) ou un écran luminescent (radioscopie), qui permettent donc une exploration des structures anatomiques internes (cf. Fig. 1.7).

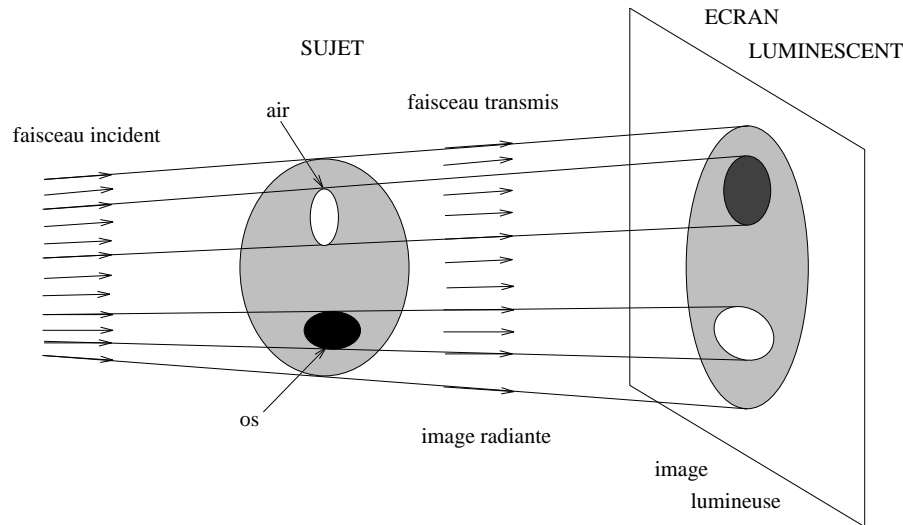


Figure 1.7: Principe du radiodiagnostic

1.2.3 La radiothérapie

La radiothérapie utilise les effets des radiations sur la matière vivante pour détruire les tumeurs. Nous avons vu que l'effet Compton s'accompagne de l'expulsion d'électrons de leurs orbites (d'où la dénomination de radiations "ionisantes"), et, par suite, d'un transfert d'énergie à la matière (phénomène d'absorption). On sait qu'une irradiation correspondant à l'absorption de 10^{-2} Joule par gramme de tissu tue toutes les cellules, alors qu'une telle énergie, répartie uniformément sous forme de chaleur, ne pourrait élever la température que de $2/1000^\circ\text{C}$. Ce phénomène s'explique en fait par le dépôt très localisé de l'énergie, qui endommage quelques grosses molécules indispensables à la vie cellulaire.

La radiothérapie a pour but de détruire toutes les cellules d'une tumeur sans détruire, pour autant, les cellules saines des tissus environnants. Pour cela, on adapte la répartition de l'énergie dans les tissus, mais on se sert également de l'effet différentiel entre cellules saines et tumorales, qui ne se reproduisent pas à la même allure.

1.2.3.1 Dosimétrie et balistique

La grandeur habituellement utilisée en radiophysique pour quantifier l'absorption d'énergie est la *dose*. En un point donné, une quantité dE est déposée dans le volume dV de masse

dm . La dose absorbée en ce point est alors définie par :

$$D = \frac{dE}{dm}$$

La dose est donc une énergie par unité de masse, et s'exprime en J.kg^{-1} , ou Gray (Gy). Il existe plusieurs moyens de mesure de la dose dans un milieu irradié, dont le plus fréquent est la chambre d'ionisation. Les mesures se font généralement dans l'eau, et la *dosimétrie* du faisceau est habituellement caractérisée par :

- le *rendement en profondeur*, qui représente la dose sur l'axe du faisceau;
- les *rendements en traversée* (ou *profils*), qui représentent la dose à une profondeur donnée;
- les *courbes isodoses*, lieux des points où la dose est constante.

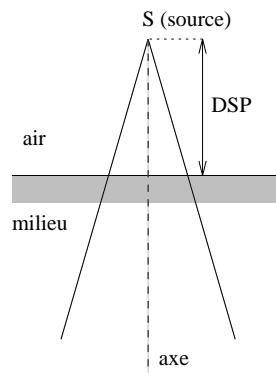


Figure 1.8: Irradiation par un faisceau de photons

La distribution de la dose dans le milieu irradié dépend de plusieurs facteurs, dont les principaux sont l'énergie, la géométrie du faisceau, et la distance source-peau (DSP). Considérons, par exemple, pour un faisceau de section carrée ($S = 25 \text{ cm}^2$ à 1 m de la source), et pour $DSP = 80 \text{ cm}$, les rendements en profondeur correspondant à des énergies de 1,25 MeV (Cobalt 60), 8 MeV et 30 MeV (cf. Fig. 1.9). On remarque que les courbes de rendement, normalisées par rapport à leur maximum, présentent un fort accroissement initial, atteignent une valeur maximale, puis décroissent ensuite. Ce comportement s'explique parfaitement par l'effet Compton. D'une part, l'accroissement initial de la dose est justifié par le fait que les photons incidents projettent "en avant" les électrons du milieu. Ce phénomène, comme on peut le constater, est d'autant plus accentué que l'énergie du faisceau est élevée. Par ailleurs, la diminution de la dose reflète le phénomène d'atténuation du faisceau de photons : cette diminution est d'autant plus lente que l'énergie du faisceau est élevée.

Il apparaît donc que les tumeurs superficielles peuvent être traitées avec des rayons de faible énergie, alors que les tumeurs plus profondes nécessitent des énergies élevées.

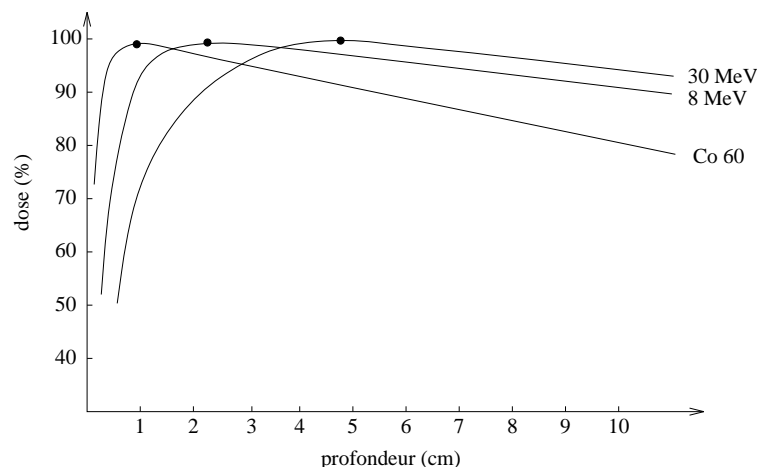


Figure 1.9: Rendements en profondeur pour des faisceaux de haute énergie

Cependant, il semble difficile de traiter une tumeur avec un faisceau unique : en effet, la dose reçue par les tissus sains voisins de la tumeur serait très proche de la dose reçue par la tumeur. On résout ce problème en utilisant diverses stratégies d'irradiation :

- les *feux croisés* : plusieurs faisceaux de directions différentes sont positionnés de manière à “englober” la tumeur (cf. Fig. 1.10 (a)).
- la *cyclothérapie* : la source se déplace sur une trajectoire circulaire centrée sur la tumeur (cf. Fig. 1.10 (b)).

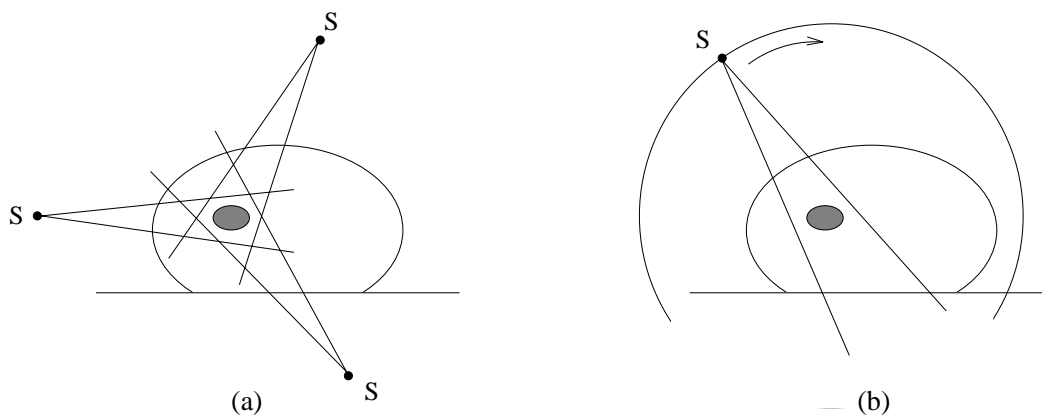


Figure 1.10: Stratégies de traitement : (a) Feux croisés (b) Cyclothérapie

La technique des feux croisés est la plus utilisée. En pratique, un radiophysicien réalise toujours une dosimétrie pré-opératoire : à partir de coupes scanner ou IRM, il choisit d'abord la position des différents faisceaux, et leur donne une forme en s'aidant éventuellement de caches (ou atténuateurs) qui permettent de protéger certaines zones radiosensibles. Il détermine ensuite, pour chacun de ces faisceaux, un temps d'exposition (ou pondération) de telle sorte que la distribution de la dose satisfasse aux contraintes médicales. De nos jours, cette opération est réalisée à l'aide d'un logiciel informatique de

calcul de dose ; cependant, elle nécessite souvent plusieurs essais avant de parvenir à une dosimétrie adéquate.

1.2.3.2 Distribution de la dose dans le temps

Lors des premiers traitements radiothérapeutiques, au début du siècle, il était pratiqué une unique irradiation, délivrée en plusieurs heures. Une meilleure connaissance des phénomènes radiobiologiques a conduit à un *fractionnement* du traitement : de nos jours, un traitement complet s'étale couramment sur plusieurs semaines, voire plusieurs mois, au rythme de quelques séances hebdomadaires.

L'origine du fractionnement est en fait le comportement différent des cellules saines et tumorales après une irradiation. En effet, si la restauration de ces cellules semble à peu près identique, l'aptitude des cellules saines à se reproduire est, par contre, très supérieure. Ceci a pour conséquence un *effet différentiel* sur les populations de cellules, qui favorise largement la survie du tissu sain (cf. Fig. 1.11).

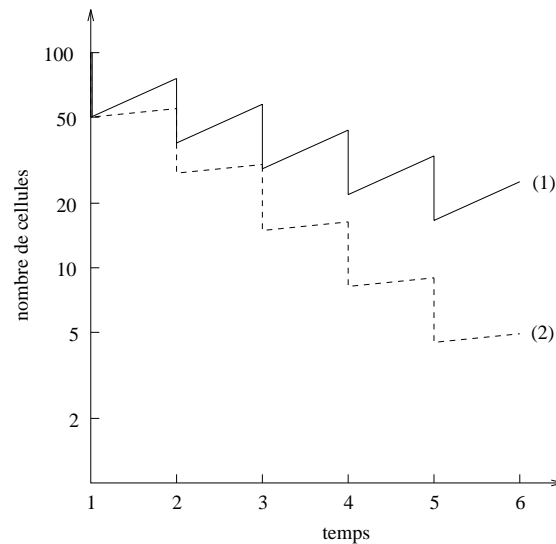


Figure 1.11: Effet différentiel de la radiothérapie fractionnée. On considère que chaque irradiation réduit de 50% le nombre de cellules viables. (1) une cellule sur deux se divise entre deux séances (cellules saines) (2) une cellule sur 10 se divise entre deux séances (cellules tumorales)

1.3 Conclusion : l'irradiation de la prostate

Le problème posé par le traitement radiothérapeutique de la prostate provient du fait que la glande est collée à la fois au rectum et à la vessie (cf. Fig. 1.1). Ainsi, ces deux organes étant très radiosensibles, leur irradiation provoque fréquemment des inflammations, qui se traduisent par des rectites et des cystites.

En France, l'irradiation localisée de la prostate se fait, le plus souvent, aux rayons X à 25 MV (tension de l'accélérateur), en utilisant quatre faisceaux concentriques, de section carrée $9 \times 9 \text{ cm}^2$ au niveau de la tumeur ([MLM92], cf. Fig. 1.12). Cette technique produit une distribution de dose assez homogène dans un cube qui, s'il englobe la prostate, déborde largement sur la vessie et le rectum. Le nombre réduit de faisceaux est directement lié à un souci de rapidité, la plupart des hôpitaux ne possédant qu'un accélérateur linéaire pour un grand nombre de patients. Par ailleurs, les dimensions élevées de ces faisceaux se justifient par le fait que le patient peut avoir de légers mouvements au cours de l'irradiation. Il est clair, cependant, qu'une telle balistique n'est pas très adaptée à la volonté d'attribuer une dose élevée à la prostate tout en irradiant peu la vessie et le rectum.

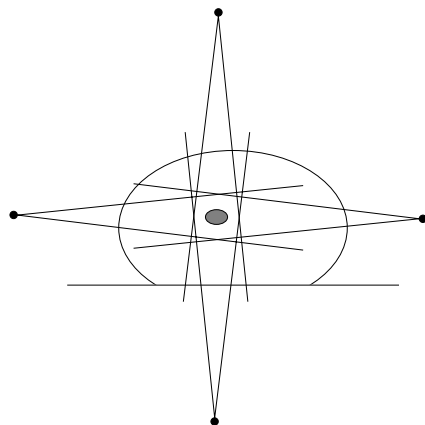


Figure 1.12: Irradiation de la prostate : coupe transversale, 4 champs "en boîte"

Chapitre 2

La dosimétrie directe

2.1 Introduction

La résolution du problème d'optimisation de la balistique nécessite de pouvoir évaluer la dose absorbée. Ainsi, on appelle "dosimétrie directe" le problème consistant, pour une balistique et un patient donnés, à déterminer la distribution de dose. Or, comme nous avons pu le constater au 1.2.2, l'interaction des rayonnements avec la matière est un phénomène très complexe, dont la modélisation physique est essentiellement microscopique. Cette modélisation ne mène à des expressions analytiques qu'au prix de grosses simplifications, et la dose est plutôt évaluée par des moyens numériques. Nous présentons dans ce chapitre les principales méthodes de calcul de dose, puis exposons les choix que nous avons retenus.

2.2 Les différentes méthodes de calcul de dose

Les méthodes numériques de calcul de dose sont très variées ; on distinguera, cependant, les méthodes basées sur la physique de celles basées sur les mathématiques ou l'informatique. Les principaux critères permettant d'évaluer une méthode sont : d'une part les différentes *possibilités* qu'elle inclut (prise en compte de la nature, de l'énergie, de la géométrie des faisceaux, etc.), d'autre part sa *précision* (on considère qu'une précision de 2 à 3 % est nécessaire pour un système de dosimétrie clinique), enfin sa *rapidité*.

2.2.1 Les méthodes à caractère physique

2.2.1.1 La séparation primaire-diffusé (méthode de Clarkson)

On rappelle qu'un photon *primaire* est un photon qui n'a pas encore subi d'interaction avec la matière. Un photon *diffusé*, au contraire, a été dévié de sa trajectoire initiale par une ou plusieurs interactions. On distingue ainsi un rayonnement primaire et un rayonnement

diffusé, qui donnent lieu à une dose primaire et une dose diffusée, dont la somme est la dose totale. La méthode de Clarkson, introduite en 1941 ([Cla41]), puis réellement exploitée par Cunningham en 1972 ([CSW72]), consiste à calculer séparément dose primaire et dose diffusée. Ceci peut se faire grâce à des définitions et modélisations qui peuvent être subtils, et que nous détaillerons complètement au paragraphe 2.3.

La méthode de Clarkson est actuellement l’une des plus utilisées pour les logiciels cliniques, car elle présente la possibilité d’un calcul de dose pour des champs de forme quelconque, tout en restant un bon compromis entre précision et temps de calcul.

2.2.1.2 La convolution de kernels

La méthode des kernels (“noyaux”) est relativement récente puisqu’elle fut introduite notamment par Boyer ([BM85]), Mackie ([MSB85]) et Ahnesjø([Ahn87]). Cette méthode est basée sur une remarque physique : l’interaction d’un photon en un point ne donne pas lieu à un dépôt *local* de l’énergie, mais à une répartition de cette énergie *autour* du point d’interaction. Dans le cas d’un milieu homogène, on définit ainsi la fonction kernel de dose $h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ comme étant la fraction d’énergie apportée en \mathbf{r} (rayon-vecteur par rapport à la source) par les électrons et photons interagissant en \mathbf{r}' (cf. Fig 2.1). h est généralement supposé invariant dans l’espace.

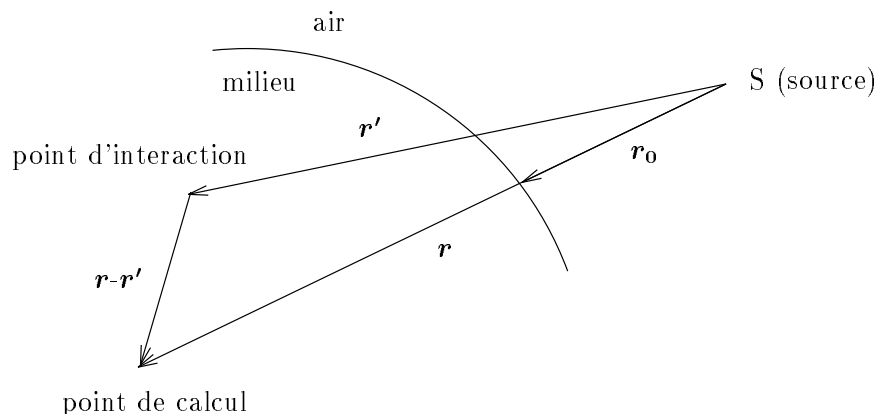


Figure 2.1: Contribution à la dose en \mathbf{r} d’une interaction en \mathbf{r}'

On montre ainsi ([BM85]) que la dose en \mathbf{r} peut s’écrire :

$$D(\mathbf{r}) = \int_V f(\mathbf{r}')h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3r' \quad (2.1)$$

où V est le volume irradié et f la fluence en photons *primaires*.

Cette équation, qui est une simple convolution, exprime le cumul des contributions énergétiques élémentaires déposées autour de \mathbf{r} , pondérées par la fluence en photons primaires.

L'application de cette méthode de calcul de dose nécessite donc d'une part la connaissance de la fonction kernel h , d'autre part le calcul en tout point de la fluence en photons primaires :

- le kernel de dose est généralement pré-calculé grâce aux méthodes de Monte Carlo (cf. 2.2.1.3, [AAB87]), et stocké sous forme de matrices de "dispersion de dose". On note ici la grande utilité de ces méthodes, dont la précision permet à l'erreur de ne pas être amplifiée par (2.1).
- la fluence en photons primaires s'exprime analytiquement par :

$$h(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}_0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \exp\left(-\int_{r_0}^r \mu(l)\rho(l)dl\right)$$

où \mathbf{r}_0 est le point d'intersection avec la surface du milieu (cf. Fig. 2.1), μ le coefficient d'atténuation massique, et ρ la densité.

Le calcul direct de la distribution de dose à partir de (2.1) peut atteindre rapidement plusieurs heures de calcul, et il est beaucoup plus efficace d'effectuer la convolution dans le domaine de Fourier ([FB87],[BWM88]). Ceci revient en fait à une simple multiplication :

$$D = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f).\mathcal{F}(h))$$

où \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} désignent respectivement la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse.

Dans le cas d'un milieu hétérogène, Boyer et Mok ([BM86]) ont montré qu'il est encore possible d'exprimer la dose sous forme de convolutions de kernels. Cependant, la fluence primaire n'est alors plus suffisante, et il est nécessaire d'introduire une fluence multiple.

En définitive, la méthode des kernels est une méthode précise, mais, bien qu'applicable pour des champs irréguliers, elle est encore trop lente pour être utilisée dans le cadre d'un système de dosimétrie clinique. Cependant, au vu de l'accroissement continu de la puissance des machines utilisées, on ne peut douter que cette méthode soit prometteuse et parvienne rapidement à remplacer la méthode de Clarkson.

2.2.1.3 Les méthodes de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo ont pour but de reconstruire l'effet macroscopique de dose par simulation d'un grand nombre d'interactions de particules avec la matière. On ne décrira pas ici la théorie de ces méthodes, basée sur des notions probabilistes très précises ([HH67],[Shr62]). Notons que l'application au calcul de dose consiste en fait à "tirer au sort" le devenir des particules (d'où le nom de la méthode), en se basant sur les différentes probabilités d'interaction, connues des physiciens ([And90]).

Considérons, par exemple, le cas d'un choc Compton, qui est l'interaction la plus observée dans le domaine de la radiothérapie (cf. 1.2.2.1). Si un photon d'énergie E heurte un électron, les relations de Klein et Nishina ([TDDJ63]) fournissent la probabilité $K(\theta)$ qu'un photon soit émis à l'angle θ par rapport à la direction incidente :

$$K(\theta) = r_0^2 \cdot \frac{1}{[1 + a(1 - \cos \theta)]^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cdot \left(1 + \frac{a^2(1 - \cos^2 \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + a(1 - \cos \theta)]}\right)$$

r_0 est le rayon de l'électron, et $a = \frac{E}{m_0 c^2}$, où E est l'énergie du photon incident, m_0 la masse de l'électron, c la vitesse de la lumière.

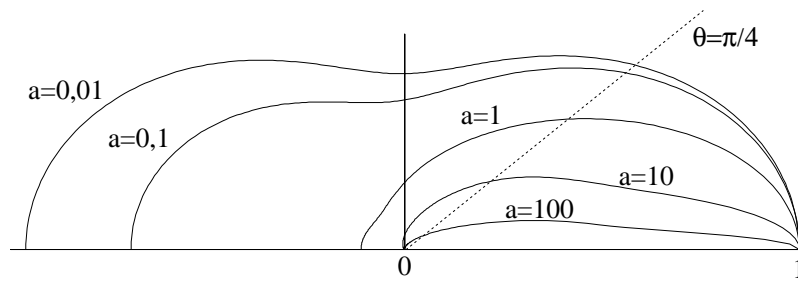


Figure 2.2: Représentation en coordonnées polaires de $K(\theta)$, probabilité pour qu'un photon soit diffusé à l'angle θ . On remarque que pour de faibles énergies, les photons sont émis à peu près uniformément dans toutes les directions, alors que pour de hautes énergies, ils sont majoritairement émis à θ proche de 0, et quasiment pas rétrodiffusés.

On a représenté sur la Figure 2.2 la fonction $K(\theta)$ en coordonnées polaires, pour différentes valeurs de a . La connaissance de $K(\theta)$ et des autres lois de probabilité régissant les différentes interactions permet de simuler les trajectoires des particules étape par étape. L'effet de dose est ensuite interprété comme moyenne d'effets individuels des différentes particules. Il est clair que pour obtenir une représentation statistique fidèle, il est indispensable d'effectuer un très grand nombre de simulations : une précision acceptable (2 à 3%) nécessite la reconstruction des trajectoires de plusieurs dizaines de millions de photons incidents. Ceci requiert des temps de calcul impressionnants, qui peuvent facilement atteindre plusieurs jours.

Les méthodes de Monte Carlo semblent donc peu adaptées à la dosimétrie clinique. Cependant, elles restent très utiles pour des études théoriques ou pour valider d'autres modèles de calcul dosimétrique (calcul des kernels de dose).

2.2.2 Les méthodes à caractère mathématique et informatique

2.2.2.1 Le stockage informatique des données

La méthode de calcul utilisant le stockage informatique des doses est l'une des plus anciennes, directement issue des méthodes manuelles de calcul (notons que le calcul infor-

matique des doses a été introduit au C.H.U. de Grenoble en 1977). Les doses sont d’abord mesurées, avant d’être stockées dans des tables : on pourrait imaginer des tables tridimensionnelles de dose, mais ceci n’est jamais le cas au vu de la quantité des mesures à réaliser. On se contente, en fait, de mesurer les doses dans un plan contenant l’axe du faisceau ; en effectuant des mesures d’une part sur cet axe, d’autre part, sur des axes transverses et à différentes profondeurs, on obtient ainsi des “grilles” de doses, qui peuvent être cartésiennes ou pas (cf. Fig. 2.3).

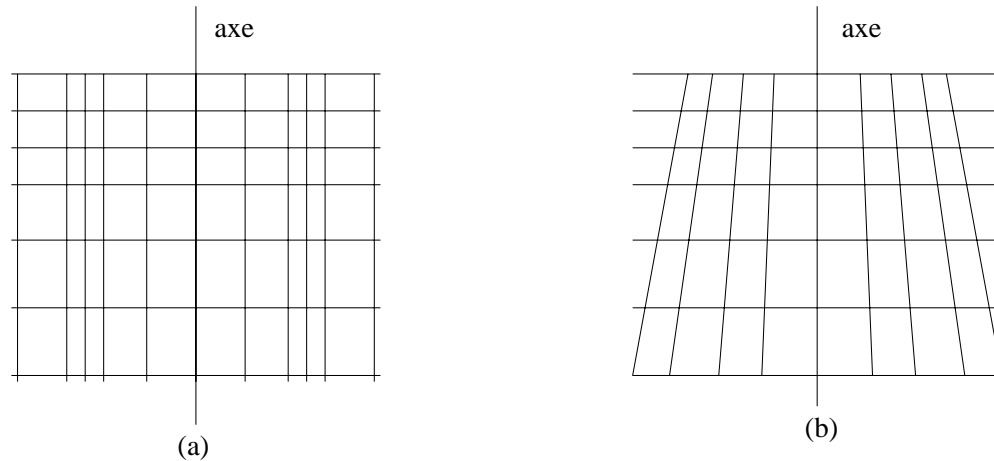


Figure 2.3: Exemples de grilles : (a) grille cartésienne (b) grille en éventail, avec lignes concourantes à la source

Il est clair, cependant, que le fait de se contenter de données bidimensionnelles a pour conséquence de limiter cette méthode à des champs suffisamment réguliers (champs circulaires, carrés, etc.). Dans ce cas, on peut ensuite calculer la dose dans un plan de profondeur quelconque en effectuant différentes interpolations sur les données.

Afin de limiter le travail expérimental et la quantité de mesures effectuées, diverses corrections sont réalisées. Par exemple, le calcul de la dose pour un champ rectangulaire de côtés a et b peut se ramener à un champ carré de côté l , dit “champ carré équivalent” ([BDM74]) :

$$l = \frac{2ab}{a + b}$$

La méthode de calcul par stockage des données représente un bon compromis entre temps de calcul et précision, et peut ainsi être un outil efficace pour les logiciels de dosimétrie clinique. Par contre, on notera ses limitations pour des situations complexes comme les champs irréguliers.

2.2.2.2 La modélisation analytique de la dose

Comme nous l’avons précisé précédemment, nous ne disposons pas de représentation analytique de la dose qui soit directement issue de la physique. Il est possible, cependant, de

déterminer une modélisation analytique de la dose à partir de données expérimentales.

La dose primaire à l'axe se représente rigoureusement par une exponentielle. Pour la dose totale, somme de la dose primaire et de la dose diffusée, il est classique de considérer une combinaison linéaire de deux ou plusieurs exponentielles ([Mel70],[GMBF88]). Le rendement en profondeur RP peut ainsi se modéliser sous la forme suivante (cf. Fig. 2.4) :

$$RP(z) = a(e^{-bz} - e^{-cz})$$

où z est la profondeur, a, b, c des paramètres à déterminer.

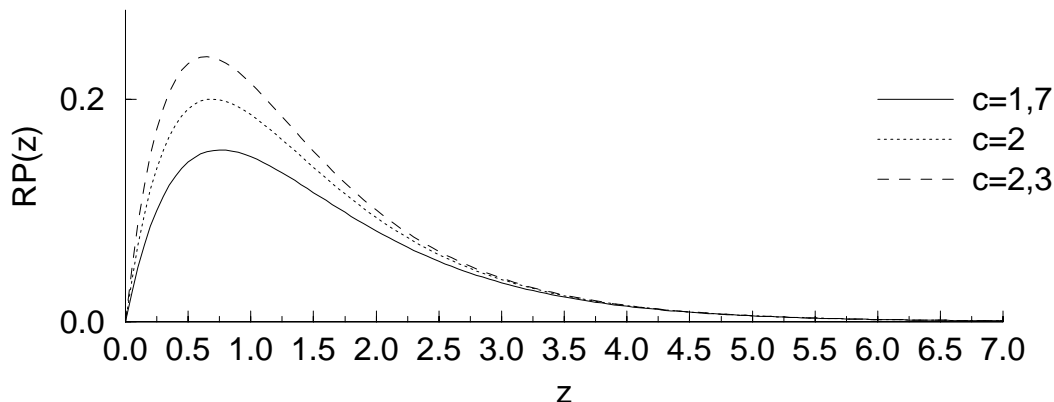


Figure 2.4: Représentation de $RP(z)$ pour $a = 1, b = 1$, et trois valeurs de c

Les rendements en traversée, quant à eux, font moins l'unanimité. Ils peuvent, selon la dimension des faisceaux, être représentés à l'aide de la fonction arctan ([GMBF88]) ou de gaussiennes (minifaisceaux).

La détermination des différents paramètres se fait par minimisation de l'erreur sur les données expérimentales. Il convient ensuite de déterminer les domaines de validité des expressions analytiques obtenues : on constate qu'il est souvent nécessaire de séparer l'espace des paramètres en sous-ensembles associés à des formules analytiques distinctes, et, parfois, d'introduire des coefficients correctifs. La modélisation analytique de la dose présente donc le fort inconvénient d'avoir une précision un peu incontrôlable ; il est évident, d'autre part, qu'elle est très limitée quant à la complexité des faisceaux modélisés.

2.2.3 Conclusion

Les méthodes présentées précédemment ont toutes leurs avantages et leurs inconvénients, et doivent donc être choisies selon les situations. Les méthodes physiques sont particulièrement utiles pour les situations complexes : champs irréguliers (notamment dans le cadre de l'utilisation d'un collimateur multilames), prise en compte d'atténuateurs, milieux hétérogènes, etc. Ces méthodes présentent, de manière générale, une précision satisfaisante, mais des temps de calcul qui le sont moins. Ceci peut, par exemple, poser problème lorsque l'on veut réaliser une véritable dosimétrie tridimensionnelle. La rapidité

est, en fait, le seul point fort des méthodes de calcul par stockage de données et modélisation analytique, qui doivent être utilisées dans des conditions physiques suffisamment simples pour garder une précision tolérable. Elles sont appréciées, notamment, pour calculer des surfaces isodoses, qui sont destinées à être visualisées et, donc, ne nécessitent pas une précision extrême. Notons, enfin, l'importance des données expérimentales servant pour ces différentes méthodes, et de leur ajustement en fonction des appareils effectivement utilisés. Dans le cas de données inadaptées, on s'éloigne de la réalité de manière incontrôlée.

Notre choix : deux méthodes de calcul de dose

Comme nous l'avons précisé ci-avant, le choix d'une méthode de calcul de dose doit se faire suivant la complexité des faisceaux utilisés, donc, indirectement, selon le protocole choisi. Nous avons décidé, d'une part, d'implémenter la méthode de Clarkson, utile pour les protocoles comportant des faisceaux à géométrie variable, incontournables dans le contexte de la radiothérapie conformatrice. Par ailleurs, et ce en vue d'un protocole possédant un unique faisceau circulaire, nous avons réalisé une modélisation analytique de ce faisceau qui utilise les fonctions spline, ce qui, dans ce cas bien précis, et en comparaison avec la méthode de Clarkson, nous a permis d'accroître la précision tout en diminuant le temps de calcul.

Nous détaillons ci-après les deux méthodes choisies. Précisons que nous nous sommes placés dans des conditions physiques très simples.

Nous avons supposé, en premier lieu, que le milieu irradié était délimité par une surface plane, et que l'axe du faisceau considéré était orthogonal à cette surface. Cette hypothèse ne peut évidemment être maintenue dans le cadre de l'irradiation du corps humain, et une correction d'obliquité du faisceau s'impose alors, que nous expliquons au 2.3.3.

D'autre part, on a supposé le milieu irradié homogène équivalent à l'eau : cette "approximation" est très commune en radiothérapie, ce qui se justifie par le fait que les tissus du corps humain ont une densité très proche de celle de l'eau. Il est vrai que les os, et surtout les poumons, représentent des hétérogénéités non négligeables, qui nécessitent certaines corrections. Cependant, ceci concerne assez peu la région pelvienne, et nous ne nous sommes donc pas attardés sur ces corrections.

2.3 La méthode de Clarkson

Le principe de la méthode consiste donc à calculer séparément dose primaire et dose diffusée. La technique générale étant basée sur le découpage des champs en secteurs circulaires, il convient, dans un premier temps, d'analyser la situation dans le cas des champs circulaires, avant de détailler le calcul pour un champ quelconque.

2.3.1 La séparation primaire-diffusé pour des champs circulaires

Considérons un milieu homogène irradié par un faisceau : soit M un point appartenant à l'axe du faisceau, et situé à la profondeur z dans le milieu. On suppose ce faisceau de section circulaire de rayon r à la profondeur z (cf. Fig. 2.5).

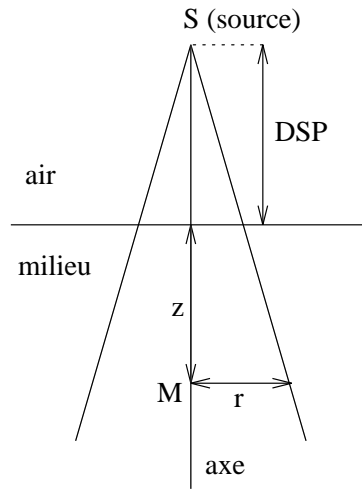


Figure 2.5: Irradiation par un faisceau de section circulaire

On définit le *rapport tissu-air* au point M par :

$$T(z, r) = \frac{D(z, r)}{D_A(z, r)}$$

où :

$D(z, r)$ est la dose absorbée au point M ;

$D_A(z, r)$ est la dose absorbée, dans l'air, par une petite masse de milieu placée autour du point M .

Notons que la dose $D_A(z, r)$, directement issue du rayonnement primaire, sera supérieure à la dose $D(z, r)$, qui subit les effets de l'atténuation et de la diffusion. Pour séparer les contributions du primaire et du diffusé au rapport tissu-air, on constate que lorsque les dimensions du champ diminuent, donc lorsque r tend vers 0, le rayonnement diffusé disparaît, et seul subsiste le rayonnement primaire. La contribution de ce dernier sera donc $T(z, 0)$, qui ne dépend ainsi que de l'épaisseur de milieu z . Celle du rayonnement diffusé, que l'on appellera *rapport diffusé-air* sera par conséquent :

$$S(z, r) = T(z, r) - T(z, 0)$$

Il est clair que $T(z, 0)$ n'est qu'une notation mathématique, et ne peut être mesuré directement. Pour accéder à cette valeur, il suffit en fait de réaliser une extrapolation en $r = 0$ de la courbe $T(z, r)$ provenant de mesures expérimentales.

Le rapport tissu-air possède une propriété qui justifie pleinement son utilisation dans le cadre du calcul de doses. En effet, il a été montré ([JBR58]) que $T(z, r)$ est indépendant de la distance à la source SM , et il en est de même de l'atténuation $T(z, 0)$ et du rapport diffusé-air $S(z, r)$. Ainsi, les valeurs du primaire et du diffusé provenant de mesures expérimentales peuvent facilement être tabulées et, pour une énergie donnée, restent valides pour une DSP quelconque.

2.3.2 Cas des champs de forme complexe

On se place maintenant dans le cas plus général d'un champ irrégulier, souvent réalisé grâce à un cache focalisé (cf. Fig 2.6 (a)), mais qui peut l'être également avec un collimateur multilames. On suppose un tel champ défini par une ligne polygonale, dans un plan orthogonal à son axe. On veut maintenant calculer la dose en un point M de profondeur z : plaçons-nous dans le plan de profondeur z (cf. Fig. 2.6 (b)). Il s'agit d'évaluer séparément dose primaire et dose diffusée.

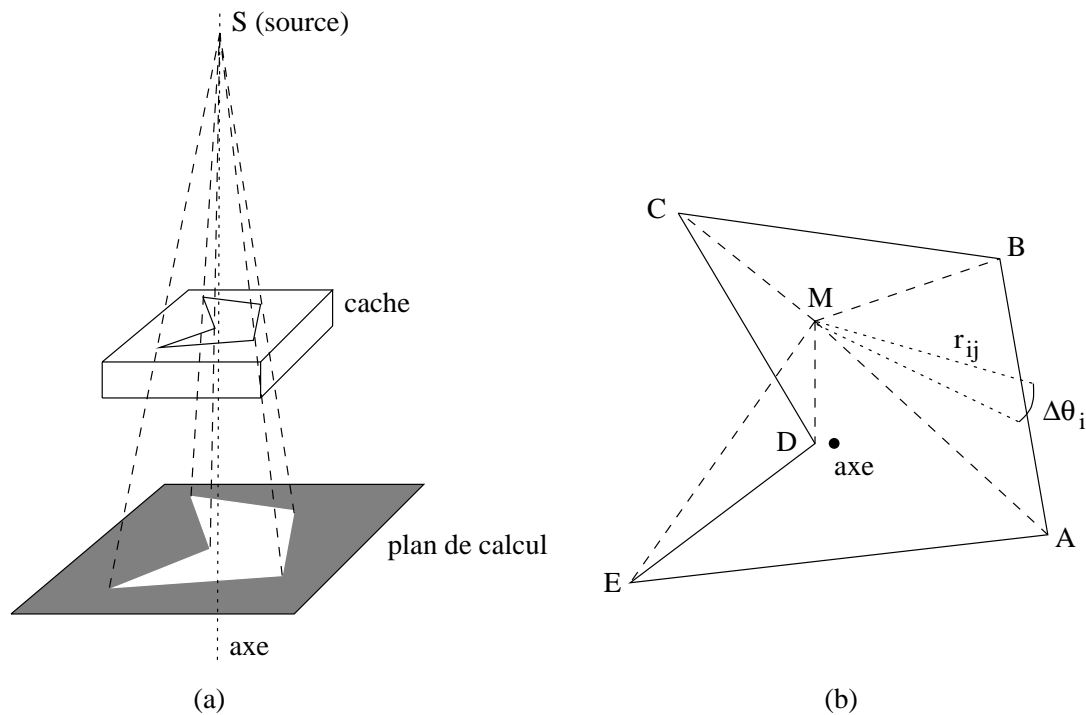


Figure 2.6: (a) cache focalisé (b) calcul de la dose en M par découpage en secteurs circulaires

2.3.2.1 Calcul de la dose diffusée

La première étape consiste à découper le champ en triangles (AMB , BMC , etc.) indicés par i . Chacun de ces triangles est ensuite lui-même décomposé en secteurs circulaires de centre M , d'angle $\Delta\theta_i$ et de rayons r_{ij} . Prenons l'exemple du triangle AMB ($i = 1$) : on peut considérer que la contribution du secteur j au rapport diffusé-air en M sera $\Delta\theta_i/2\pi S(z, r_{ij})$, la valeur de $S(z, r_{ij})$ pouvant être déterminée par interpolation dans la table correspondante. Le rayonnement diffusé provenant du triangle AMB est donc,

approximativement, $\Delta\theta_i/2\pi \sum_j S(z, r_{ij})$. On peut donc ainsi, en sommant les contributions de tous les triangles, obtenir une valeur approchée du rapport diffusé-air au point M . Cependant, il est indispensable de prendre en compte les différentes concavités du champ : c'est le cas, par exemple, du triangle DME , dont la contribution sera à retrancher, et non à ajouter. On définit ainsi, pour chaque triangle, un coefficient G_i qui vaut 1 si l'angle en M est orienté dans le sens trigonométrique (triangle AMB) et -1 dans le cas contraire (triangle DME). Finalement, le rapport diffusé-air peut donc s'écrire :

$$S(z, M) = \sum_i G_i \frac{\Delta\theta_i}{2\pi} \sum_j S(z, r_{ij}) \quad (2.2)$$

On en déduit, ensuite, la dose diffusée par :

$$D_S = D_A(z) S(z, M) \quad (2.3)$$

Le terme $D_A(z)$ ne concerne en fait que les points sur l'axe du faisceau. Cependant, la relative validité de l'équation précédente est admise pour tout point du plan de profondeur z ([CSW72]), et a pu être vérifiée par comparaison avec diverses mesures expérimentales.

2.3.2.2 Calcul de la dose primaire

Pour un point M appartenant à l'axe du faisceau, la dose primaire est obtenue par :

$$D_P = D_A(z) T(z, 0)$$

Cependant, lorsque M n'appartient pas à l'axe du faisceau, cette équation doit être corrigée. On tiendra compte, en premier lieu, de l'épaisseur effective de milieu sur la droite oblique joignant S à M : z' . Par ailleurs, il est indispensable, pour le rayonnement primaire, de tenir compte de la *pénombre*, conséquence du fait que, d'une part, la source n'est jamais vraiment ponctuelle, d'autre part, le collimateur n'arrête jamais la totalité des photons en provenance de la source. Ceci se traduira par un facteur $P(M)$ tel que :

$$D_P = D_A(z) P(M) T(z', 0) \quad (2.4)$$

Expliquons brièvement le calcul du coefficient de pénombre $P(M)$. Ce calcul est en fait basé sur le modèle de Wilkinson ([WRC70]), qui, pour traduire le fait que la source ne peut être vraiment ponctuelle, introduit une fonction d'intensité définie dans le plan de cette source :

$$I(r') = \frac{1}{2\pi} \beta'^2 e^{-\beta' r'}$$

où r' est la distance à la source S , et β' une constante dépendant du système de collimation.

On considère ainsi une source virtuelle définie dans un disque de très large diamètre et émettant un rayonnement d'intensité I . La correction de pénombre géométrique $P(M)$

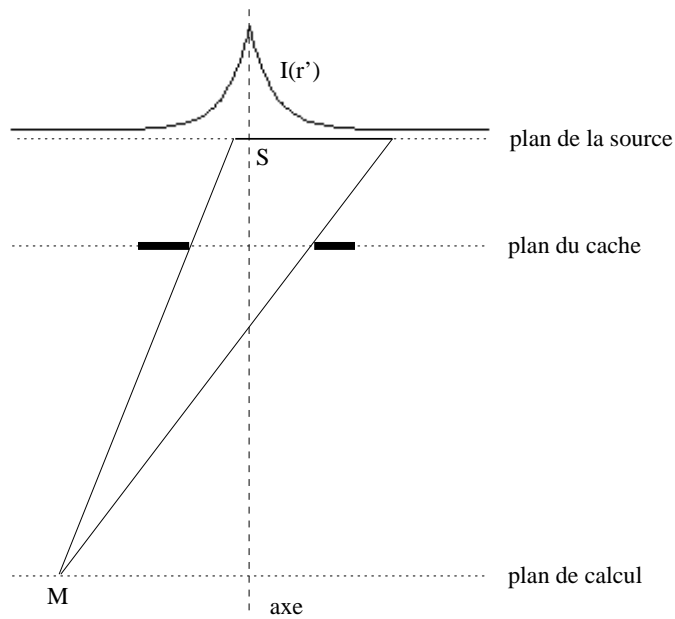


Figure 2.7: Calcul de la pénombre géométrique en utilisant une source virtuelle d'intensité I

est ensuite obtenue en intégrant $I(r')$ sur la partie de la source virtuelle vue depuis M à travers le cache (cf. Fig. 2.7). Ceci peut se faire grâce au découpage en secteurs circulaires déjà utilisé pour calculer le rayonnement diffusé. L'intégrale de I sur un disque de centre S et de rayon R est :

$$\int_0^R I(r') 2\pi r' dr' = 1 - (\beta' R + 1)e^{-\beta' R}$$

Si l'on tient compte du coefficient de transmission t du collimateur, qui sera en pratique de l'ordre de 1 ou 2%, et dont la conséquence principale est d'obtenir une dose non nulle en dehors des limites géométriques du faisceau, l'expression finale de $P(M)$ peut s'écrire :

$$P(M) = t + (1 - t) \sum_i G_i \frac{\Delta\theta_i}{2\pi} \sum_j [1 - (\beta r_{ij} + 1)e^{-\beta r_{ij}}] \quad (2.5)$$

où β est la constante telle que $\beta r = \beta' r'$.

2.3.2.3 Calcul de la dose totale

En définitive, la dose totale est la somme de la dose primaire et de la dose diffusée :

$$D = D_P + D_S = D_A(z) \cdot [P(M) T(z', 0) + S(z, M)] \quad (2.6)$$

L'expression entre crochets ayant été évaluée précédemment, il reste à calculer $D_A(z)$, dose absorbée dans l'air par une petite masse de milieu placée sur l'axe, à la profondeur z . Ceci peut se faire simplement grâce à la loi dite de "l'inverse carré des

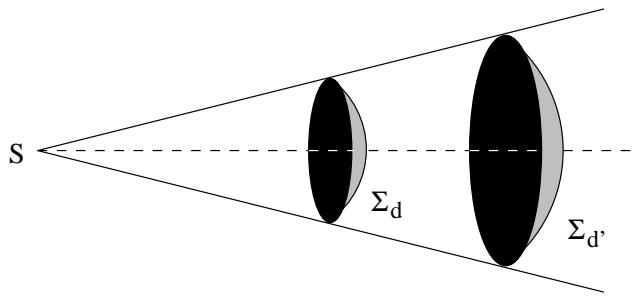


Figure 2.8: Flux et intensité du flux sur une surface d'un faisceau circulaire

distances”.

Considérons un faisceau circulaire d'émission uniforme. Soit d une distance donnée : on définit la surface Σ_d , intersection de la sphère de centre S et de rayon d avec le faisceau (cf. Fig. 2.8). Alors le flux Φ de photons à travers Σ_d ne dépend pas de d , et l'intensité I_d du flux à la distance d est uniforme sur Σ_d . L'aire de Σ_d étant proportionnelle à d^2 , il existe donc k tel que :

$$\Phi = k.I_d.d^2$$

La loi de l'inverse carré des distance s'exprime de manière générale sous la forme suivante : soient d et d' deux distances à la source, alors :

$$I_d.d^2 = I_{d'}.d'^2$$

La dose D_A étant une dose dans l'air, on peut donc la calculer en appliquant la loi de l'inverse carré des distances. Fixons un point de référence sur l'axe, dans l'air, à une distance d_{ref} de la source, et supposons qu'il reçoive une dose D_0 . La dose totale en M s'exprime donc finalement par :

$$D = D_0 \cdot \left(\frac{d_{ref}}{DSP + z} \right)^2 \cdot [P(M) T(z', 0) + S(z, M)] \quad (2.7)$$

On sait donc calculer la dose en tout point, à un coefficient multiplicatif près (D_0). Notre but étant d'optimiser les pondérations des différents faisceaux, la connaissance de la dose D_0 relative à chaque faisceau ne nous est pas nécessaire. En revanche, elle le sera aux radiophysiciens, qui calculent les différents débits de dose avant le traitement.

2.3.3 La correction d'obliquité

Rappelons que, pour la méthode précédente, nous nous sommes placés dans le cas où la surface délimitant le milieu irradié est un plan, et avons supposé que l'axe du faisceau est orthogonal à ce plan. Il est clair qu'il est difficile de maintenir ces hypothèses dans le cadre de l'irradiation du corps humain. Pourtant, dans certains cas où la surface à traiter est très irrégulière, les radiophysiciens utilisent un accessoire appelé *bolus* permettant de ramener

les conditions d'irradiation à une surface plane orthogonale à l'axe, et ainsi d'“égaliser” les isodoses. Les bolus, fabriqués en moulant sur la surface à traiter un équivalent tissu (paraffine, cire, etc.), sont en fait surtout utilisés dans le cadre des traitements aux électrons, afin d'accroître la dose à la peau. Pour ce qui est de l'irradiation prostatique, étant donné les incidences variées des différents faisceaux, l'utilisation des bolus n'est, en fait, pas envisageable.

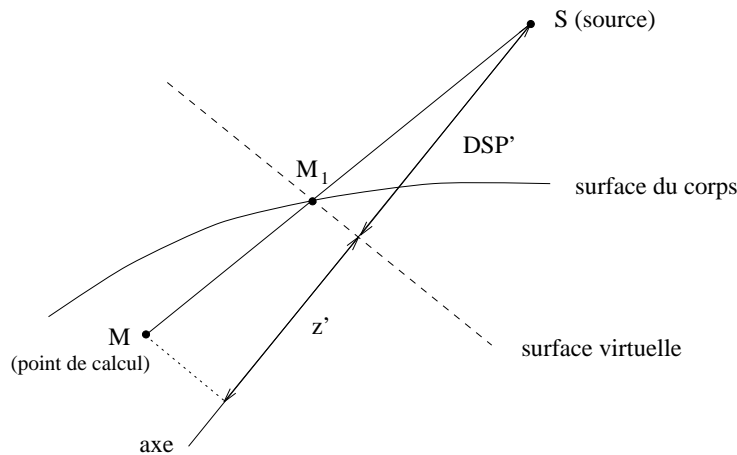


Figure 2.9: Correction de la dose pour une surface courbe

Dans le cas d'un faisceau oblique (ou, de manière plus générale, d'une surface courbe), la dose primaire et la dose diffusée se trouvent modifiées. Cependant, les nouvelles conditions physiques d'irradiation sont trop complexes pour permettre un calcul précis de ces doses : on se contente, dans la plupart des cas, d'une correction par rapport aux conditions “normales” ([TDDJ63],[BDM74],[MB74]). La *règle des deux tiers*, par exemple, est une méthode connue des radiophysiciens, basée sur des remarques empiriques, permettant de construire des isodoses pour une surface quelconque à partir des isodoses de base. Cette méthode est cependant assez limitée puisque l'erreur faite devient importante à une profondeur de 10 cm environ.

La méthode de correction que nous avons utilisée consiste, pour un point de calcul M , à déterminer l'intersection M_1 de la droite (SM) avec la surface du corps (cf. Fig. 2.9). On définit ainsi une surface plane passant par M_1 et orthogonale à l'axe du faisceau, puis on considère que la dose réelle reçue en M est peu différente de la dose que recevrait ce point sous cette surface virtuelle, c'est à dire pour une distance source-peau DSP' et une profondeur z' . On notera ainsi que le rendement en profondeur (dose à l'axe) est inchangé par rapport aux conditions normales, ce qui semble avoir été vérifié expérimentalement ([TDDJ63]).

Il est à noter que cette méthode, si elle est simple et bien établie, n'en nécessite pas moins la connaissance de la surface du corps et, pour chaque point M , le calcul du point M_1 . Ceci alourdira sévèrement la démarche informatique, tant du point de vue de la

place mémoire utilisée que du temps de calcul, notamment lors de l'évaluation de matrices tridimensionnelles de dose.

2.3.4 Exemples

2.3.4.1 La méthode de Clarkson

Comme nous l'avons détaillé précédemment, la méthode de Clarkson est basée sur une séparation du primaire et du diffusé. En pratique, ceci se traduit par l'utilisation de deux tables, valables pour une énergie donnée, et contenant, pour un nombre fini de valeurs de z et de r :

- l'atténuation $T(z, 0)$;
- le rapport diffusé-air $S(z, r)$.

L'obtention de ces tables nécessite de nombreuses mesures, d'une grande précision, effectuées avec le matériel adéquat. Le Service de Radiophysique de l'Institut Curie, qui possède une grande expérience de ces méthodes de calcul, a eu l'amabilité de nous fournir ses données. Bien que celles-ci ne soient pas représentatives de l'accélérateur linéaire utilisé à Grenoble, elles nous seront suffisantes dans le cadre de l'optimisation dosimétrique.

Considérons maintenant un champ défini, dans un plan Oxy orthogonal à son axe, par une ligne polygonale (cf. Fig. 2.10). On suppose la distance SO (où S est la source) égale à 150 cm : les caches focalisés sont souvent définis à partir d'une radiographie effectuée à cette distance.

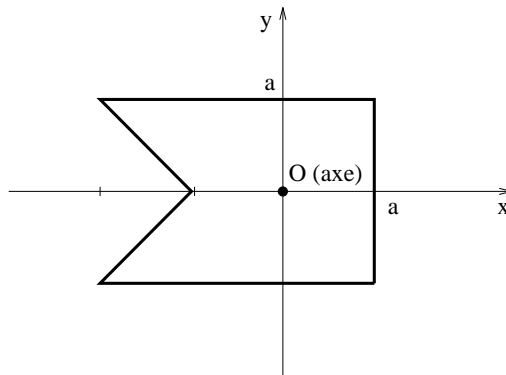


Figure 2.10: Définition d'un faisceau par une ligne polygonale

Les calculs de dose ont été effectués pour une énergie de 23 MeV. Nous avons choisi des valeurs habituelles pour les paramètres de la méthode de Clarkson :

- $\Delta\theta = 10^\circ$ (découpage en secteurs angulaires);
- $\beta = 3$ (coefficient de pénombre géométrique);

- $t=2\%$ (coefficient de transmission du collimateur).

Nous avons étudié le comportement dosimétrique du faisceau pour deux tailles différentes : $a=5$ cm et $a=2$ cm. La Figure 2.11 comporte différentes courbes de rendement, où les valeurs affichées représentent la dose à une constante multiplicative près. On remarque, sur les rendements en profondeur, le fort accroissement au voisinage de $z = 0$, caractéristique des hautes énergies. Par ailleurs, le maximum de dose se situe à la profondeur $z = 3$ cm (ce qui est quasiment indépendant de la forme du faisceau), et la dose maximale est supérieure pour $a=5$ cm.

Les rendements en traversée, contrairement aux rendements en profondeur, sont fort différents. Le rendement pour $a=5$ cm montre un palier, correspondant aux points intérieurs aux limites géométriques du faisceau (les points avoisinant ces limites constituent la zone de pénombre). Pour $a=2$ cm, par contre, le rendement ne présente plus de palier, et a plutôt l'allure d'une gaussienne, trait représentatif des faisceaux de petite taille.

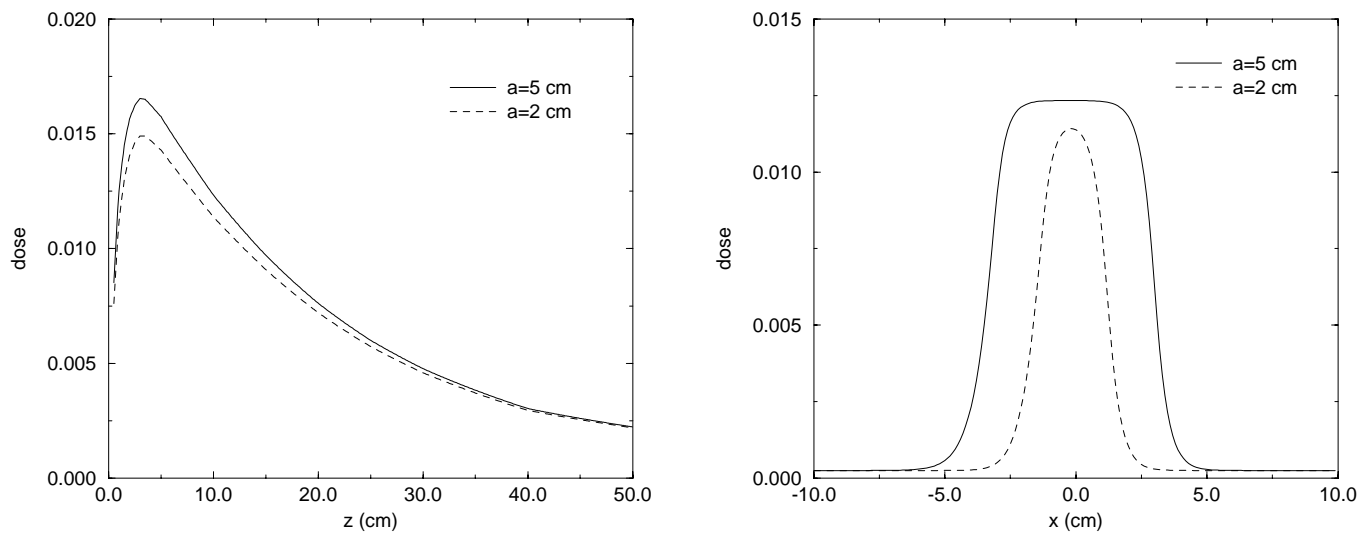


Figure 2.11: Rendements en profondeur (z) et en traversée ($z = 10$ cm, $y = 0$)

Comme le montrent, plus clairement encore, les représentations de la dose dans le plan $z = 10$ cm (cf. Fig. 2.12, Fig. 2.13), les profils dosimétriques de deux faisceaux de même forme, mais de dimensions distinctes, peuvent être radicalement différents. La prise en compte de ce phénomène lors du choix d'une balistique de traitement est très importante.

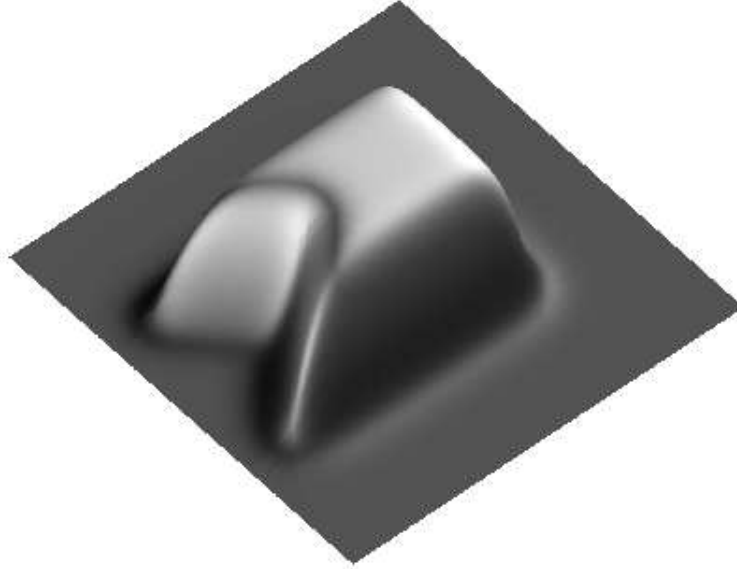


Figure 2.12: $a=5$ cm ; représentation de la dose dans le plan $z=10$ cm



Figure 2.13: $a=2$ cm ; représentation de la dose dans le plan $z=10$ cm

2.3.4.2 La correction d'obliquité

Considérons un faisceau de section circulaire, de diamètre 7 cm à 1 m de la source, et supposons le milieu irradié délimité par un plan. Nous nous intéressons aux deux cas suivants :

- le plan est orthogonal à l'axe du faisceau;
- le plan est incliné de 45° par rapport à l'axe du faisceau : il est alors nécessaire de réaliser une correction d'obliquité.

Nous avons, dans ces deux cas, calculé les courbes isodoses dans un plan contenant l'axe du faisceau (cf. Fig. 2.14, Fig. 2.15). On constate, ainsi, que les isodoses s'étirent d'un côté dans le cas d'une incidence oblique, ce qui s'explique par la différence de milieu traversé. Il est donc évident que la correction d'obliquité est indispensable pour l'évaluation de la dose dans le corps humain.

2.4 Modélisation d'un faisceau par fonctions spline

Le but, ici, est la modélisation analytique d'un faisceau de géométrie donnée à partir de mesures expérimentales. Comme nous l'avons constaté précédemment, une telle modélisation n'est réellement possible que pour des géométries simples. Nous avons décidé, après discussion avec les médecins, de nous intéresser à un faisceau circulaire. Mathématiquement, ceci est avantageux par le fait qu'un tel faisceau présente une invariance par rotation autour de son axe, ce qui supprime donc une variable d'espace. On réduit ainsi le nombre de mesures nécessaires à la modélisation. Médicalement, la forme de la prostate s'adapte *a priori* très bien à un tir de faisceaux circulaires concentriques. C'est moins le cas si l'on cherche à traiter également les vésicules séminales, ce qui donne une forme plus allongée à la cible.

Etant donné la variété des faisceaux habituellement utilisés en radiothérapie, il peut sembler inhabituel de se concentrer sur la modélisation d'un seul et unique faisceau. Il faut savoir, cependant, que cette étude s'inscrit dans un protocole de traitement n'utilisant que ledit faisceau, que l'on a donc cherché à modéliser de manière aussi précise que possible tout en conservant des temps de calcul raisonnables. Ici, les variables se limitent à la distance source-peau DSP , la profondeur dans l'eau z , et la distance à l'axe r (cf. Fig. 2.16). On suppose donc disposer de mesures expérimentales de la dose D en un certain nombre de points (DSP_i, z_i, r_i) ($i = 1$ à n).

Dès lors, et notamment dans le cas où ces points sont répartis sur un maillage, il est aisé de calculer la dose reçue par interpolation. Or on note, a priori, que ceci peut poser problème dans la mesure où la fonction de dose D est très régulière, propriété issue

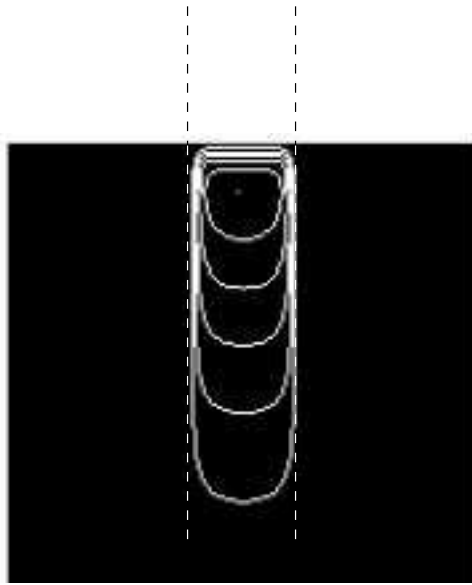


Figure 2.14: Courbes isodoses pour une incidence orthogonale

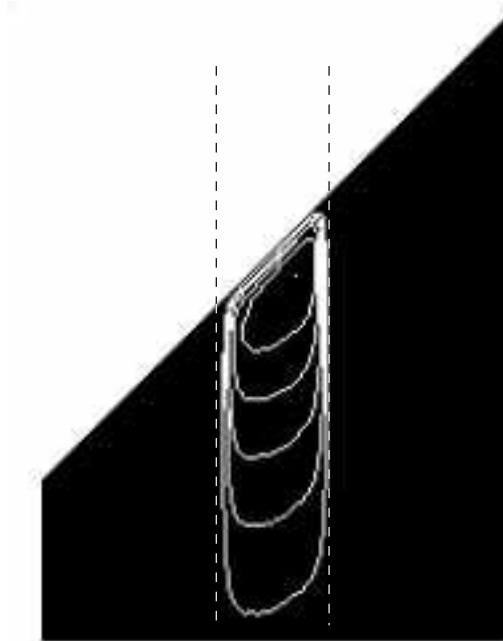


Figure 2.15: Courbes isodoses pour une incidence oblique

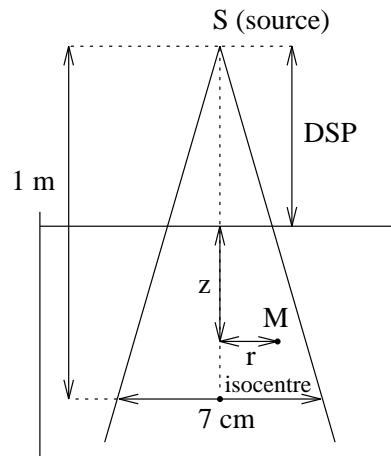


Figure 2.16: Irradiation par un faisceau circulaire : variables d'espace

du phénomène physique de diffusion. La modélisation par fonctions spline, qui permet de prendre en compte des contraintes de régularité, nous a donc semblé tout à fait adaptée à notre problème.

Nous rappelons, dans ce paragraphe, quelques notions sur les fonctions spline, et notamment l'approximation de surfaces, puis expliquons l'utilisation que nous en avons faite pour une extension à une modélisation en dimension trois. Nous présentons ensuite les résultats obtenus, et comparons notamment le calcul par fonction spline à l'interpolation *multilinéaire*.

2.4.1 Rappels : approximations et fonctions spline en dimensions 1 et 2

2.4.1.1 En dimension 1

Soit $H^2[a, b]$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies sur $[a, b]$, dont la dérivée est continue, et dont la dérivée seconde est de carré sommable.

On considère par ailleurs n abscisses distinctes :

$$a = x_1 < \dots < x_n = b$$

ainsi que n valeurs $\{r_i\}$.

Il s'agit de représenter les données (x_i, r_i) ($i = 1 \dots n$) par une fonction de $H^2[a, b]$. Pour cela, on peut procéder de deux manières distinctes : l'*interpolation* impose à la fonction approximante de passer par les points (x_i, r_i) , alors que le *lissage* tolère une erreur en chaque point. Le lissage est particulièrement adapté lorsque les valeurs r_i sont bruitées, par exemple lorsqu'il s'agit de données mesurées.

Posons les problèmes d'optimisation suivants ([Lau72]) :

- pour l'*interpolation*, on cherche parmi les fonctions $f \in H^2[a, b]$ qui vérifient :

$$\forall i = 1 \dots n \quad f(x_i) = r_i \quad (2.8)$$

celle qui minimise la fonctionnelle :

$$J(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx \quad (2.9)$$

J correspond à l'énergie de flexion d'une latte mince. La minimisation de cette expression permet d'obtenir une courbe aussi lisse que possible.

- pour le *lissage*, on cherche la fonction $f \in H^2[a, b]$ qui minimise :

$$J(f) = \int_a^b (f''(x))^2 dx + \rho \sum_{i=1}^n (f(x_i) - r_i)^2 \quad (2.10)$$

On a ainsi supprimé les contraintes (2.8) et introduit, dans l'expression à minimiser, un terme de lissage mesurant l'erreur aux points x_i . Le coefficient ρ permet de pondérer l'importance de ce terme par rapport au terme de flexion.

On montre ([Lau72]) que les solutions aux problèmes d'interpolation et de lissage appartiennent au même sous-espace S de $H^2[a, b]$, relatif aux abscisses $\{x_i\}$, et défini comme suit :

$f \in S$ si et seulement si :

- f est un polynôme de degré 3 par morceaux sur $[a, b]$;
- $f \in C^2[a, b]$.

2.4.1.2 En dimension 2

On suppose ici travailler sur un pavé $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Contrairement à la dimension 1, la répartition des points dans Ω peut se faire de diverses manières :

- le cas le plus général correspond à un nombre fini de points, répartis aléatoirement dans Ω . Les données s'écriront donc sous la forme : (x_i, y_i, r_i) , $i = 1 \dots n$.
- un maillage est le produit cartésien d'une subdivision de $[a, b]$ et d'une subdivision de $[c, d]$: $\{x_1, \dots, x_{n_x}\} \times \{y_1, \dots, y_{n_y}\}$. Dans ce cas, les données s'écriront sous la forme (x_i, y_j, r_{ij}) , $i = 1 \dots n_x$, $j = 1 \dots n_y$. Un maillage régulier est le produit cartésien de deux subdivisions régulières.

Les notions d'interpolation et de lissage sont ici définies de la même manière qu'en dimension 1. La fonctionnelle à minimiser, par contre, peut prendre des formes diverses, et donne donc lieu à de nombreuses solutions. On distinguera principalement les splines "plaque mince" et les splines bicubiques.

Les splines “plaque mince”

On redéfinit ici la fonctionnelle à minimiser comme étant l'énergie de flexion d'une plaque mince :

$$J_1(f) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy$$

Les données étant réparties aléatoirement, Duchon ([Duc76],[Duc80]) montre que, pour l'interpolation comme pour le lissage, il existe une et une seule solution σ , et que celle-ci s'exprime sous la forme :

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |t - a_i|^2 \log |t - a_i|^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta$$

avec :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$$

On a noté : $t = (x, y)$, $a_i = (x_i, y_i)$, $|\cdot|$ la norme euclidienne sur R^2 . Les coefficients λ_i , α_1 , α_2 , et β s'obtiennent en résolvant un système linéaire ([Pai78]).

Les splines bicubiques

Les données sont ici supposées réparties sur un maillage, et la fonctionnelle à minimiser s'exprime par :

$$J_2(f) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right)^2 dx dy + \rho \sum_{i,j} (f(x_i, y_j) - r_{ij})^2$$

Le terme intégral n'a aucune signification physique particulière. De Boor ([Boo62]) montre que les fonctions minimisant la fonctionnelle J_2 sont en fait des produits tensoriels de fonctions splines cubiques, et peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\sigma(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} B_i^x(x) B_j^y(y)$$

où B_i^x et B_j^y sont les fonctions spline de degré 3 relatives, respectivement, aux subdivisions de $[a, b]$ et $[c, d]$.

Les splines bicubiques “pseudo-plaque mince”

Champleboux ([Cha91]) mêle les approches de Duchon et de De Boor pour obtenir les bicubiques “pseudo-plaque mince”. En supposant les données réparties aléatoirement, il détermine, parmi les splines bicubiques relatives à un maillage régulier donné, celle qui minimise la fonctionnelle :

$$J_1(f) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy + \rho \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - r_i)^2$$

f peut s'écrire sous forme matricielle :

$$f(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} B_i^x(x) B_j^y(y) = B_x^t \alpha B_y$$

où B_x et B_y sont les vecteurs contenant les valeurs des différentes fonctions spline aux points x et y , et α une matrice, qui détermine entièrement la fonction f . On peut donc exprimer J_1 et son gradient en fonction de α , puis annuler celui-ci afin de minimiser la fonctionnelle. On obtient finalement un système linéaire creux.

2.4.1.3 Conclusion

Les splines “plaque mince” de Duchon représentent indéniablement un résultat théorique puissant, par le fait qu'il s'agit d'une solution analytique, applicable pour des données réparties de manière quelconque. Cette méthode est cependant de mise en œuvre peu pratique : dans le cas de données nombreuses, le calcul de la fonction interpolante, puis son évaluation, deviennent en effet très lourds.

Les splines bicubiques de De Boor sont en cela plutôt avantageuses, mais elles nécessitent une répartition des données sur un maillage, ce qui est une contrainte non négligeable.

Les bicubiques “pseudo-plaque mince” représentent donc *a priori* un bon compromis entre ces deux méthodes puisqu'elles permettent de traiter des données éparses tout en conservant des temps de calcul raisonnables. De plus, ces fonctions conservent la propriété “physique” de minimiser l'énergie de flexion d'une plaque mince. Tous ces avantages font que nous avons effectivement choisi cette méthode pour modéliser notre faisceau.

2.4.2 Une méthode pour la dimension 3

Comme nous l'avons précisé précédemment, notre but est de modéliser la dose en fonction :

- de la profondeur dans le milieu z ;
- de la distance à l'axe r ;
- de la distance source-peau DSP .

Les variables se situent donc dans un espace de dimension 3, cas naturellement moins abordable que dans des espaces de dimensions 1 et 2. Nous avons donc décidé, plutôt que d'effectuer directement une minimisation dans un espace de fonctions à trois variables, de réaliser, à DSP fixe, plusieurs modélisations 2D de la dose (en z et r), puis un lissage 1D des coefficients des fonctions spline.

On décide ici de travailler sur un pavé Ω de R^3 :

$$(z, r, DSP) \in \Omega = [z_{min}, z_{max}] \times [r_{min}, r_{max}] \times [DSP_{min}, DSP_{max}]$$

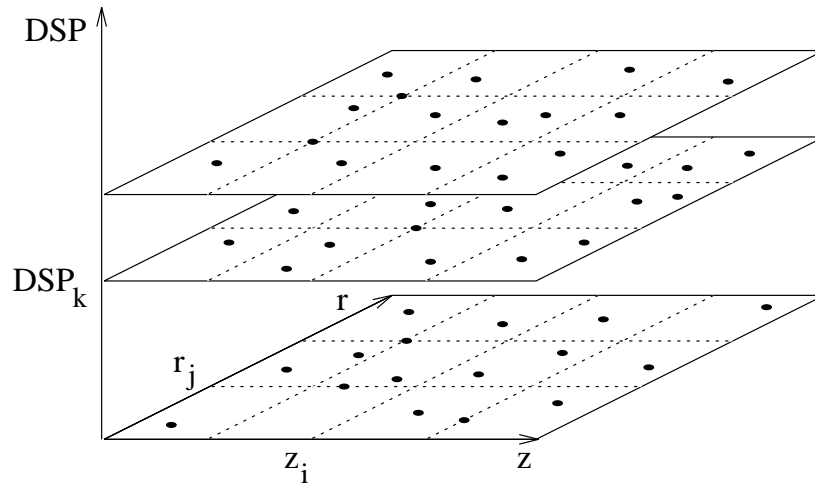


Figure 2.17: Disposition des données

On dispose de mesures expérimentales de dose : $\{D_l\}$, $l = 1 \dots n$, réparties aux points (z_l, r_l, DSP_l) ; on suppose que ces points appartiennent aux plans $DSP = DSP_k$, $k = 1 \dots n_{DSP}$ (cf. Fig. 2.17).

Considérons, par ailleurs, un maillage régulier du pavé $\Delta = [z_{min}, z_{max}] \times [r_{min}, r_{max}] : \{z_i\} \times \{r_j\}$ ($i = 1 \dots n_z$, $j = 1 \dots n_r$). Ce maillage, qui n'a pas nécessairement de lien avec les données, a pour but de définir une base de splines bicubiques, qui engendreront l'espace S des fonctions qui prennent la forme suivante :

$$f(z, r) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} B_i^z(z) B_j^r(r)$$

On peut, dans chacun des plans $DSP = DSP_k$, effectuer un lissage des données. Pour k fixé, ceci revient donc à déterminer la fonction f_k de S qui minimise la fonctionnelle :

$$J_k(f) = \tau \cdot \int_{\Delta} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)^2 \right) dz dr + \sum_{DSP_l = DSP_k} (f(z_l, r_l) - D_l)^2 \quad (2.11)$$

Notons que, dans le but de pouvoir annuler le terme de flexion, nous avons inversé, dans l'expression de J_k , le rôle du coefficient de pondération (ici τ).

La solution s'écrit :

$$f_k(z, r) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^k B_i^z(z) B_j^r(r)$$

La seconde étape, après avoir minimisé J_k ($k = 1 \dots n_{DSP}$), consiste à réaliser, pour chaque couple (i, j) , un lissage 1D des données (DSP_k, α_{ij}^k) ($k = 1 \dots n_{DSP}$). On détermine donc la fonction de $H[DSP_{min}, DSP_{max}]$ qui minimise :

$$J_{ij}(f) = \tau \cdot \int_{DSP_{min}}^{DSP_{max}} (f''(u))^2 du + \sum_{k=1}^{n_{DSP}} (f(DSP_k) - \alpha_{ij}^k)^2 \quad (2.12)$$

La solution s'écrit :

$$\alpha_{ij}(DSP) = \sum_k \lambda_{ijk} B_k^{DSP}(DSP) \quad (2.13)$$

On obtient finalement une fonction approximante de l'ensemble des données en écrivant :

$$D(z, r, DSP) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}(DSP) B_i^z(z) B_j^r(r) = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} B_i^z(z) B_j^r(r) B_k^{DSP}(DSP) \quad (2.14)$$

Ainsi, la fonction D est une combinaison linéaire de splines tricubiques, mais elle n'a cependant pas été obtenue par minimisation d'une fonctionnelle sur cet espace de fonctions.

2.4.3 Mise en œuvre

Nous avons appliqué la méthode présentée précédemment dans le cas d'un faisceau circulaire de diamètre 7 cm à 1 m de la source. Dans un premier temps, nous détaillons la construction du modèle de dose, qui comprend, d'une part, l'acquisition des données expérimentales, puis le calcul de la fonction spline. Nous présentons ensuite des tests numériques.

2.4.3.1 Construction du modèle de dose

Acquisition des données expérimentales

Il s'agit ici d'une étape longue et délicate. En effet, la manipulation d'un accélérateur linéaire n'est jamais banale, et les tirs incessants peuvent donner lieu à des comportements imprévisibles de la machine (lors de nos expériences, celle-ci est d'ailleurs tombée en panne plusieurs fois). Il est donc évident que ces manipulations se font toujours avec l'aide d'un radiophysicien.

On distingue, dans le matériel utilisé pour ces acquisitions de doses, le matériel d'irradiation à proprement parler, du matériel servant pour les mesures.

Le matériel d'irradiation comprend :

- **un accélérateur linéaire** SIEMENS KD2, que nous avons utilisé à 25 MeV, énergie habituelle pour les traitements de prostate. L'ouverture du collimateur est de $10 \times 10 \text{ cm}^2$ à 1 m de la source.
- **un cache circulaire focalisé** : contrairement à ce que l'on pourrait penser a priori, les champs circulaires ne sont que peu utilisés en radiothérapie, la seule exception étant les faisceaux de petites dimensions servant pour l'irradiation des tumeurs cérébrales. Afin de disposer d'un champ circulaire de diamètre 7 cm à 1 m de la

source, il nous a donc fallu fabriquer un cache focalisé. Pour cela, nous avons employé le *cerrobend*, alliage de bismuth, cadmium, étain et plomb présentant le double avantage d'être d'une grande densité et de fondre à 70°C : il est ainsi possible de le mouler dans du polystyrène.

Le matériel utilisé pour les mesures de dose comprend :

- **une chambre d'ionisation** cylindrique et étanche, de marque PTW. Le principe d'une telle chambre, comme son nom l'indique, est de mesurer le nombre d'ionisations ayant lieu dans sa petite cavité (cf. Fig. 2.18), et, ainsi, de donner une information directe sur la dose reçue.

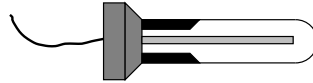


Figure 2.18: Chambre d'ionisation

- **une chambre d'ionisation** de marque RK, positionnée au niveau du collimateur, et permettant de tenir compte des variations de débit de l'accélérateur. Ces variations, imprévisibles, peuvent être causées par différents facteurs, comme une augmentation de la température due à des tirs répétés.
- **un explorateur de fantôme** RFA300 comprenant une cuve de 40 cm de côté, remplie d'eau, ainsi qu'un ordinateur PC permettant de piloter la chambre d'ionisation dans cette cuve, et de récupérer et stocker les données mesurées.

Notons que la qualité des données acquises passe par un excellent positionnement de tous ces appareils de mesure. Il s'agit, en premier lieu, du réglage de la cuve, qui se fait grâce aux plans laser présents en salle de traitement. Par ailleurs, on s'aide d'un télémètre pour le positionnement de la chambre d'ionisation par rapport au faisceau.

Le choix du pavé Ω sur lequel doivent être réalisées les mesures s'est fait en fonction des données habituelles d'irradiation de la prostate, sachant que celles-ci varient inévitablement selon les patients. La *DSP*, par exemple, dépendra beaucoup de la corpulence de l'individu, et l'expérience montre que l'on est toujours confronté à des cas "hors-normes". Nous avons finalement fixé :

- $z_{min} = 0$, $z_{max} = 400$ mm
- $r_{min} = -80$ mm, $r_{max} = 80$ mm (r étant défini comme la distance à l'axe, on devrait en théorie se limiter à $r \geq 0$; cependant, nous avons réalisé des profils complets afin de vérifier - en partie - la symétrie du champ)
- $DSP_{min} = 80$ cm, $DSP_{max} = 95$ cm

Dans le but d'écourter les mesures, r_{max} a été choisi assez faible. Ceci se justifie par le fait que, pour un champ de diamètre 7 cm à 1 m de la source et pour les valeurs considérées de DSP et z , un point dont la distance à l'axe r dépasse 8 cm est toujours largement extérieur aux limites géométriques du faisceau. On considère ainsi que la dose en un tel point est nulle.

L'acquisition des mesures étant gérée par l'explorateur de fantôme, celles-ci se sont naturellement inscrites sur un maillage, ce qui, étant donné la méthode choisie, n'était pas indispensable. Ce maillage, qui n'est pas régulier, est constitué du produit cartésien des subdivisions suivantes :

- z : 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340, 360, 380, 400 (mm)
- r : -80, -76, -72, ... 76, 80 (mm)
- DSP : 80, 85, 90, 95 (cm)

Comme on peut le noter, la subdivision en z n'est pas régulière : nous avons tenu compte du fait que la dose varie beaucoup de 0 au maximum, puis moins ensuite. Pour r , par contre, nous avons choisi une subdivision régulière et fine puisque les variations des profils de dose se situent au voisinage de la limite géométrique du champ, et dépendent donc de la profondeur. Nous nous sommes contentés, enfin, de seulement quatre DSP , sachant que la dose varie assez lentement avec ce paramètre.

En pratique, les manipulations ont consisté, pour chacune des quatre DSP , à mesurer un rendement en traversée aux différentes profondeurs (soit 24 rendements par DSP) (cf. Fig. 2.19). Ces mesures se trouvent normalisées par rapport au point maximum.

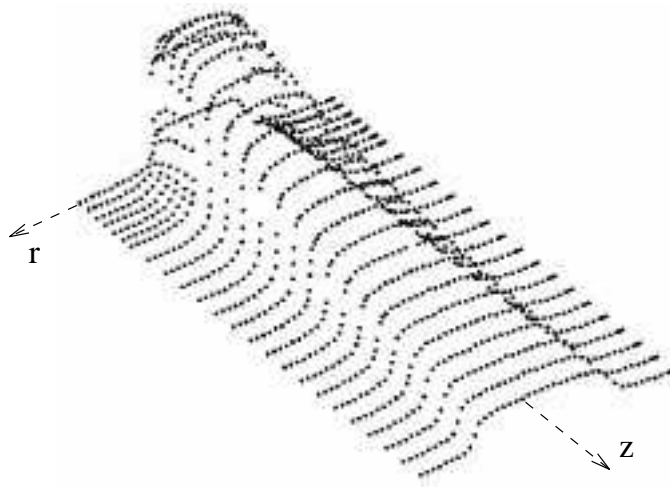


Figure 2.19: Représentation des mesures de dose effectuées à $DSP=90$ cm

Le calcul de la fonction spline

La fonction approximante décrite au 2.4.2 dépendra principalement de deux facteurs :

1. **le maillage régulier** définissant l'espace des splines tricubiques auquel appartient la fonction approximante. Nous rappelons que la méthode choisie impose que la subdivision en DSP corresponde aux plans de mesure : on aura donc $n_{DSP} = 4$. Par contre, les subdivisions en z et r - donc n_z et n_r - peuvent être choisies indépendamment des points de mesure.
2. **les paramètres de pondération** entre termes de flexion et de moindres carrés : étant donné que notre méthode passe par plusieurs lissages, on peut, en effet, choisir des paramètres différents pour ces lissages. En fait, on s'en est tenu à :
 - un paramètre commun aux lissages 1D qui, effectués sur 4 données, ne posent aucun problème : nous avons fixé ce paramètre à 10^{-5}
 - un paramètre τ commun aux lissages 2D, ce qui se justifie par le fait que les données mesurées aux différentes DSP ont des "profils" tout à fait analogues

Le calcul de la spline à proprement parler consiste à déterminer les coefficients λ_{ijk} qui la définissent (cf. (2.14)). Nous ne détaillerons pas cette étape, qui consiste en fait en une suite de lissages 1D et 2D ([Cha91]). La résolution de systèmes linéaires creux par la méthode de Cholesky aboutit finalement à un tableau tridimensionnel $\Lambda = \{\lambda_{ijk}\}$ de taille $(n_z + 2) \times (n_r + 2) \times (n_{DSP} + 2)$.

Notons que le temps d'évaluation de la fonction approximante est constant, et ne dépend pas de n_z, n_r , et n_{DSP} . En effet, on rappelle :

$$D(z, r, DSP) = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} B_i^z(z) B_j^r(r) B_k^{DSP}(DSP)$$

Les fonctions B_i^z étant des splines cubiques, il existera au plus 4 indices i tels que $B_i^z(z)$ soit non nul. De même pour B_j^r et B_k^{DSP} . La somme ci-dessus ne comporte donc jamais plus de $4^3 = 64$ termes non nuls, et le calcul se trouve ainsi considérablement allégé.

2.4.3.2 Résultats

Nous présentons dans cette partie différents tests numériques. Il s'agit, d'une part, de dégager l'influence des paramètres dont dépend la fonction approximante (le maillage régulier et le paramètre de pondération τ) afin de pouvoir effectuer un choix satisfaisant. En second lieu, nous avons voulu comparer un modèle obtenu par notre méthode avec une interpolation multilinéaire sur la grille des données : que gagne-t-on de l'un à l'autre?

Nous nous sommes basés, afin d'apprécier la qualité de la fonction approximante, sur l'erreur *maximale* et l'erreur *moyenne* aux points de mesure. Il est clair que celles-ci

ne reflètent pas le comportement global du modèle obtenu, et notamment les phénomènes d'oscillation possibles dans le cas de l'approximation par fonctions spline. Dans notre cas, cependant, nous pouvons considérer que ces oscillations sont limitées par la quantité et la qualité des données utilisées.

Rappelons que, si $\{D_l\}, l = 1 \dots n$, sont les mesures expérimentales de dose, réparties aux points (z_l, r_l, DSP_l) , et D la fonction approximante, on définit :

- l'erreur maximale :

$$E_{max} = \max_{l=1}^n |D(z_l, r_l, DSP_l) - D_l|$$

- l'erreur moyenne :

$$E_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |D(z_l, r_l, DSP_l) - D_l|$$

Dans notre cas, les données se trouvant normalisées par rapport au maximum (qui vaut donc 100), les erreurs maximale et moyenne sont donc également des erreurs relatives.

Influence des différents paramètres

1. Le maillage

Le maillage régulier détermine l'espace de fonctions auquel appartiendra la fonction approximante. Ce maillage est entièrement défini par n_z et n_r . Si l'on suppose τ fixé (ici $\tau = 10^{-5}$), nous aimerions donc étudier l'erreur en fonction de ces deux paramètres. Pour cela, il nous a semblé intéressant d'introduire les deux variables suivantes :

$$\mu = n_z \cdot n_r \quad \nu = \log \frac{n_z}{n_r}$$

Ainsi, μ représente le nombre total de points du maillage, alors que ν reflète la répartition de ces points : on aura ainsi une prépondérance en z si $\nu > 0$, en r si $\nu < 0$ (cf. Fig. 2.20).

Notons $(\mu, \nu) = \phi(n_z, n_r)$: on remarquera que ϕ est une bijection de $E = (N^*)^2$ dans $\phi(E)$, et, pour $(\mu, \nu) \in \phi(E)$:

$$n_z = \sqrt{\mu \cdot 10^\nu} \quad n_r = \sqrt{\mu \cdot 10^{-\nu}}$$

Pour $(\mu, \nu) \notin \phi(E)$, nous nous sommes servis de cette formule d'inversion en arrondissant aux entiers les plus proches.

Dans un premier temps, nous avons, pour plusieurs valeurs de μ , tracé les courbes d'erreur en fonction de ν : comment évolue l'erreur lorsque, pour un nombre de points fixe du maillage, on fait varier la répartition de ces points? Nous avons fait varier ν dans l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui, aux extrémités, correspond à $n_r = 10 \cdot n_z$ et $n_z = 10 \cdot n_r$.

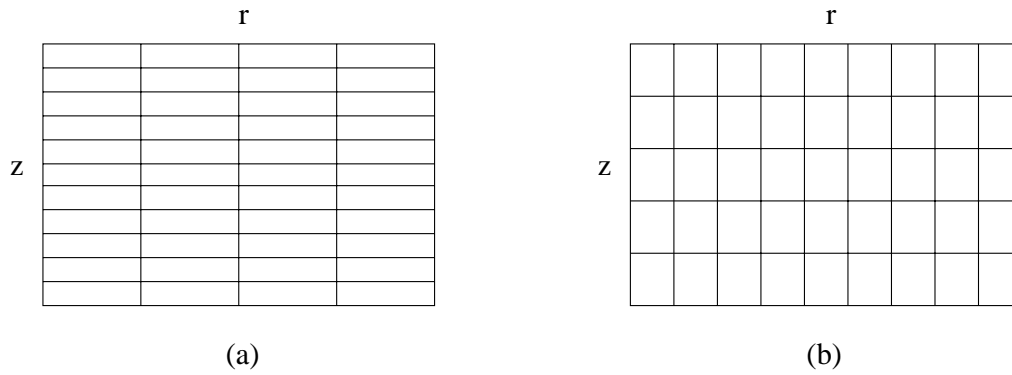


Figure 2.20: Ces deux maillages du même pavé comportent 60 points (soit $\mu = 60$). La répartition de ces points est déterminée par ν : (a) $\nu = 0,38$, soit $n_z = 12$, $n_r = 5$ (b) $\nu = -0,22$, soit $n_z = 6$, $n_r = 10$

Les résultats (cf. Fig. 2.21) montrent des courbes présentant toutes un minimum en $\nu < 0$. Lorsque μ augmente, ce minimum tend à se rapprocher de 0 (soit $n_z = n_r$), et l'erreur (maximale comme moyenne) en ce point diminue. On notera, d'autre part, que les maxima des courbes se situent au voisinage de $\nu = -1$ pour l'erreur maximale, alors qu'ils se situent au voisinage de $\nu = 1$ pour l'erreur moyenne.

Nous avons, ensuite, fixé $\nu = -0,25$ (qui se situe dans la zone proche du minimum pour les courbes présentées précédemment), et représenté les erreurs maximale et moyenne en fonction de μ , que l'on a fait varier entre 50 et 800 points (cf. Fig 2.22). On remarque ici que les courbes décroissent assez brutalement jusqu'à $\mu = 200$, puis plus lentement ensuite. On constate ainsi qu'à partir d'un certain seuil, on gagne peu sur l'erreur en augmentant le nombre de points du maillage.

2. Le paramètre de pondération

Le paramètre τ a pour but de pondérer le terme de flexion de la fonctionnelle à minimiser - terme "régularisateur" - par rapport au terme de lissage - ou de moindres carrés (cf. (2.11)). En pratique, augmenter τ a pour effet de "tendre" la spline, alors que $\tau = 0$ correspond à une simple minimisation aux moindres carrés. Lorsque les données sont peu nombreuses ou bruitées, de faibles valeurs de τ peuvent conduire à une fonction approximante qui, tout en étant "proche" des données, présente de fortes oscillations. Le choix de ce paramètre est donc important, et doit permettre de réaliser un bon compromis entre régularité et rapprochement des données.

Nous avons choisi un maillage régulier ($n_z = 16$ et $n_r = 29$, soit $\mu = 464$ et $\nu \simeq -0,26$), et avons tracé les courbes d'erreur en fonction de $\theta = -\log \tau$, pour $\theta \in [0, 7]$. Les deux courbes obtenues (cf. Fig. 2.23) sont logiquement décroissantes, avec une décroissance exponentielle pour ce qui est de l'erreur moyenne.

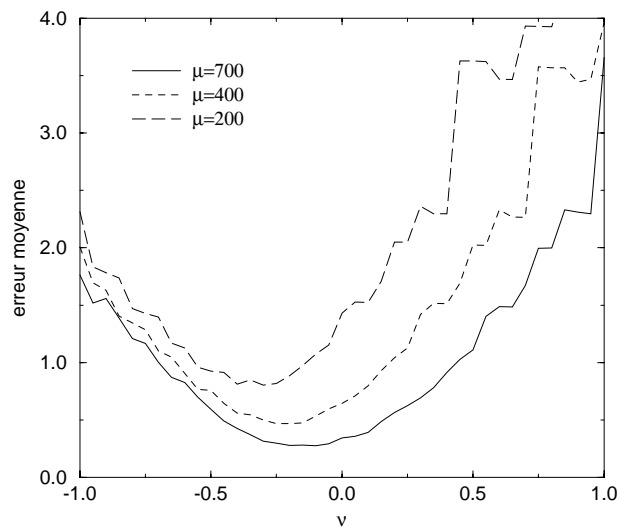
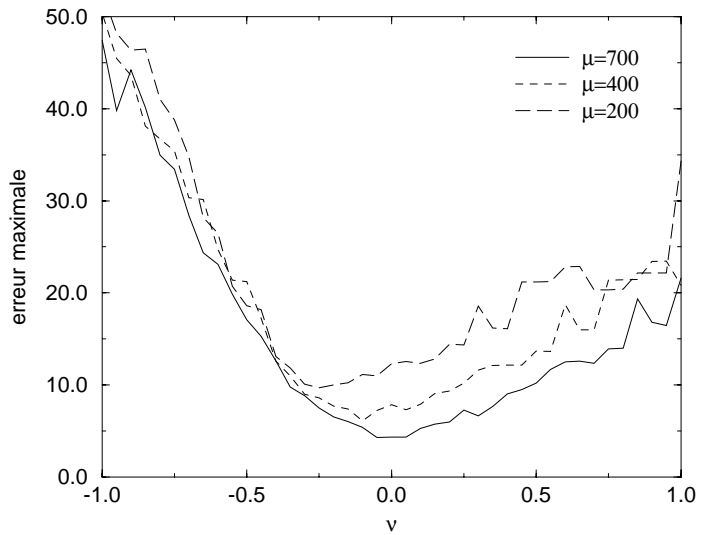


Figure 2.21: Représentation de l'erreur en fonction de ν pour $\mu=200, 400, 700$

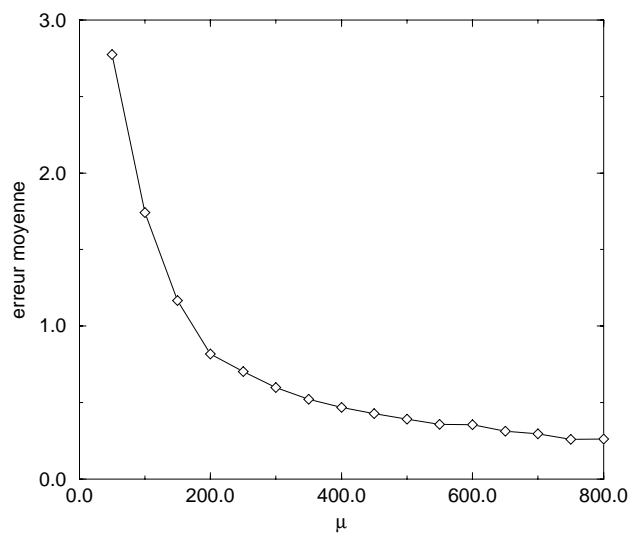
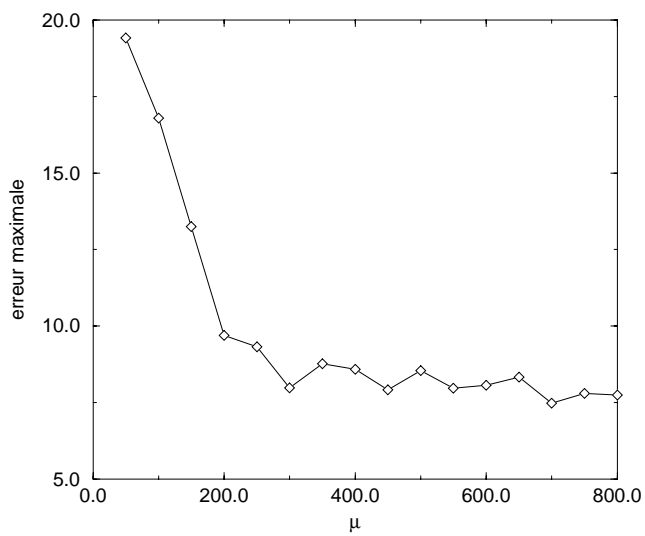


Figure 2.22: Représentation de l'erreur en fonction de μ pour $\nu = -0,25$

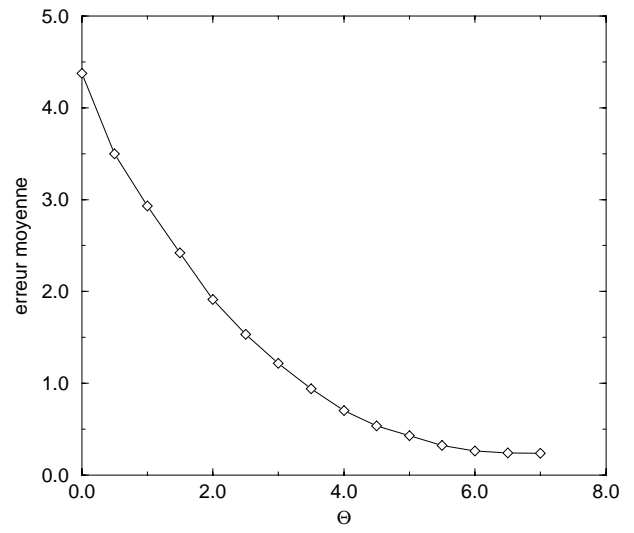
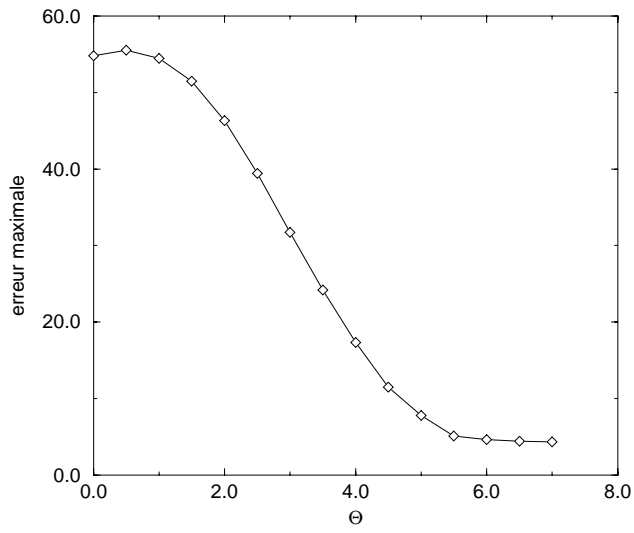


Figure 2.23: Représentation de l'erreur en fonction de $\theta = -\log \tau$ pour $n_z = 16$ et $n_r = 29$



Figure 2.24: Représentation de la fonction approximante pour $DSP=90$ cm

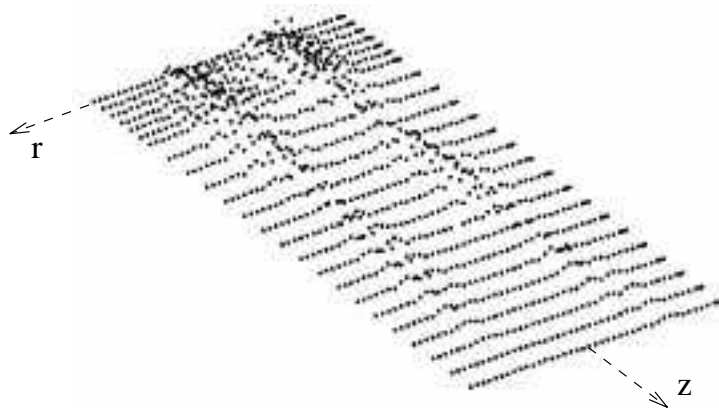


Figure 2.25: Représentation de l'erreur de la fonction approximante aux points de mesure pour $DSP=90$ cm

Après avoir observé l'influence du maillage et du coefficient de pondération sur l'erreur, nous avons pu effectuer un choix satisfaisant des paramètres μ , ν et τ (ou n_z , n_r et τ). Nous avons, d'une part, conservé le maillage précédent ($n_z = 16$ et $n_r = 29$) qui, d'après les tests précédents, permet d'atteindre des erreurs suffisamment faibles. Pour ce qui est du coefficient τ , la grande densité et l'excellente qualité des données mesurées, très peu bruitées, nous a mené à essayer $\tau = 0$. Les erreurs obtenues sont, dans ce cas :

$$E_{max} = 4,31\% \qquad E_{moy} = 0,25\%$$

La représentation du modèle de dose pour $DSP=90$ cm (cf. Fig. 2.24) montre de légères oscillations au niveau du maximum. La démarche naturelle pour y remédier serait donc d'augmenter τ . Il s'est avéré, cependant, que ces oscillations persistaient jusqu'à $\tau = 0,1$. Dans ce cas, les erreurs $E_{max}=54,5\%$ et $E_{moy}=2,9\%$ sont bien trop élevées : nous avons finalement conservé $\tau = 0$. Notons que, dans notre cas, la difficulté à obtenir une fonction approximante parfaitement lisse relève du caractère quasi-discontinu des profils de doses.

Il est intéressant de savoir où se situent les points d'erreur maximale. Nous avons donc représenté, pour $DSP=90$ cm, la fonction d'erreur, définie comme suit aux points de mesure :

$$E(z_l, r_l, DSP_l) = |D(z_l, r_l, DSP_l) - D_l|$$

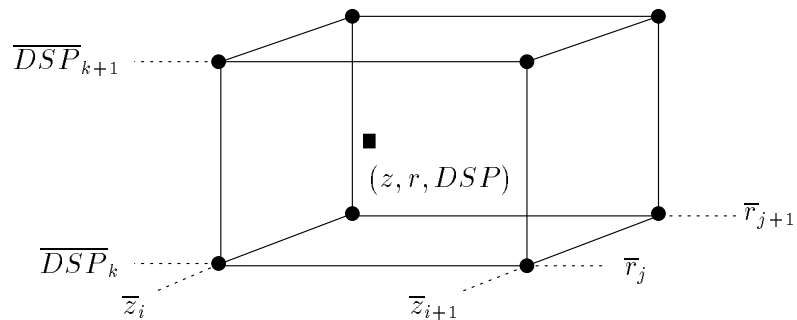
On constate ainsi (cf. Fig. 2.25) que l'erreur réside surtout dans les zones à fort gradient de dose, c'est à dire au voisinage de la limite géométrique du champ (cf. Fig. 2.19). Par ailleurs, une analyse de l'erreur pour les quatre valeurs de la DSP utilisées montre que celle-ci vaut $E_{max}=4,31\%$ en un unique point du plan $DSP=80$ cm, alors qu'elle ne dépasse pas $2,8\%$ pour $DSP=85, 90, 95$ cm. L'erreur moyenne de $0,25\%$ confirme finalement la bonne qualité du modèle obtenu.

Comparaison avec l'interpolation multilinéaire

Comme nous l'avons vu précédemment, nos mesures présentent la particularité d'être disposées en tout point d'un maillage tridimensionnel. Il est ainsi possible de réaliser une interpolation multilinéaire qui peut, étant donné la très bonne qualité des données, constituer un modèle satisfaisant ([Bat82],[ZT91]). Ce modèle présentant par ailleurs l'avantage d'être très peu coûteux à l'évaluation, il nous a donc semblé intéressant de le comparer au modèle obtenu par splines "pseudo-plaque mince".

Rappelons, dans notre cas, le calcul de la fonction d'interpolation multilinéaire. Soit $\{\bar{z}_i\} \times \{\bar{r}_j\} \times \{\overline{DSP}_k\}$ le maillage de Ω sur lequel sont définies nos données : nous noterons D_{ijk} la dose mesurée au point $(\bar{z}_i, \bar{r}_j, \overline{DSP}_k)$. Considérons $(z, r, DSP) \in \Omega$: alors il existe trois indices i, j, k tels que :

$$(z, r, DSP) \in \Delta_{ijk} = [\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}] \times [\bar{r}_j, \bar{r}_{j+1}] \times [\overline{DSP}_k, \overline{DSP}_{k+1}]$$



L'interpolation est effectuée à partir des huit sommets du pavé Δ_{ijk} . Nous pouvons écrire :

- $z \in [\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}]$: il existe $\lambda_0 \geq 0$ et $\lambda_1 \geq 0$ tels que $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ et :

$$z = \lambda_0 \bar{z}_i + \lambda_1 \bar{z}_{i+1}$$

λ_0 et λ_1 sont des polynômes du premier degré en z qui ont pour expression :

$$\lambda_0 = \frac{z - \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_i - \bar{z}_{i+1}} \quad \lambda_1 = \frac{\bar{z}_i - z}{\bar{z}_i - \bar{z}_{i+1}}$$

De même :

- $r \in [\bar{r}_j, \bar{r}_{j+1}]$: $r = \mu_0 \bar{r}_j + \mu_1 \bar{r}_{j+1}$
- $DSP \in [\overline{DSP}_k, \overline{DSP}_{k+1}]$: $DSP = \nu_0 \overline{DSP}_k + \nu_1 \overline{DSP}_{k+1}$

On peut donc exprimer (z, r, DSP) comme combinaison convexe des sommets de Δ_{ijk} :

$$\begin{aligned} (z, r, DSP) &= (\lambda_0 \bar{z}_i + \lambda_1 \bar{z}_{i+1}, \mu_0 \bar{r}_j + \mu_1 \bar{r}_{j+1}, \nu_0 \overline{DSP}_k + \nu_1 \overline{DSP}_{k+1}) \\ &= \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \{0,1\}^3} \lambda_\alpha \mu_\beta \nu_\gamma (\bar{z}_{i+\alpha}, \bar{r}_{j+\beta}, \overline{DSP}_{k+\gamma}) \end{aligned}$$

On définit la valeur de la fonction interpolante au point (z, r, DSP) comme moyenne des mesures aux différents sommets, pondérée par les coefficients barycentriques précédents, soit :

$$D(z, r, DSP) = \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \{0,1\}^3} \lambda_\alpha \mu_\beta \nu_\gamma D_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma} \quad (2.15)$$

Il est clair que la fonction D ainsi définie interpole les données aux points du maillage, c'est à dire :

$$\forall i, j, k \quad D(\bar{z}_i, \bar{r}_j, \overline{DSP}_k) = D_{ijk}$$

D'autre part, d'après les expressions de λ_α , μ_β , et ν_γ , les applications partielles de D sont des polynômes du premier degré, d'où le nom d'interpolation multilinéaire. Cette propriété apparaît clairement dans l'exemple que nous avons réalisé et représenté pour la seule dimension 2 (cf. Fig. 2.26) : on peut constater, en effet, que les restrictions de la fonction interpolante aux côtés du pavé sont des droites.

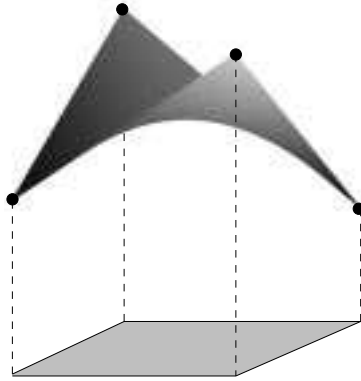


Figure 2.26: Interpolation bilinéaire sur un pavé de R^2

Notre but est donc de comparer la fonction d'interpolation avec celle obtenue par splines de lissage. Cependant, d'après la définition-même de l'interpolation, l'erreur de la fonction en tout point du maillage des points de mesure est nulle : c'est donc également le cas de l'erreur maximale et de l'erreur moyenne. Afin de pouvoir établir une comparaison, nous avons finalement partitionné le maillage de départ (3936 points, cf. page 50) en deux sous-ensembles :

- un nouveau maillage (2016 points) dont le pas de la subdivision en r est de 8 mm au lieu de 4 mm;
- un ensemble de points-test constitué des points restants (1920 points).

Ainsi, on construit à partir du nouveau maillage, qui ne comprend qu'une partie des données, des fonctions de lissage (D_{lis}) et d'interpolation (D_{int}). Les points-test n'appartenant pas au maillage, on peut y définir des erreurs maximales (E_{max}^{lis} , E_{max}^{int}) et

moyennes $(E_{moy}^{lis}, E_{moy}^{int})$ qui nous permettent de comparer les deux modèles.

La fonction d'interpolation sur le maillage des données est parfaitement définie. On obtient comme erreurs aux points-test :

$$E_{max}^{int} = 12,21\% \qquad E_{moy}^{int} = 1,2\%$$

La fonction de lissage, quant à elle, dépend à nouveau des paramètres n_z , n_r et τ . Nous avons choisi, après quelques essais, $n_z = 28$ et $n_r = 18$ pour ce qui est de la définition de l'espace des bicubiques. Par ailleurs, il s'est avéré intéressant de représenter à nouveau les erreurs en fonction de $\theta = -\log \tau$ (cf. Fig. 2.27) :

- d'une part les erreurs maximale et moyenne aux points du maillage, comme nous l'avons fait au paragraphe précédent (cf. Fig. 2.23) : les courbes sont, là encore, décroissantes.
- d'autre part les erreurs maximale et moyenne aux points-test, qui sont indépendants du maillage : E_{max}^{lis} et E_{moy}^{lis} . On note, ici, que ces courbes présentent un minimum entre $\theta = 4$ et $\theta = 5$. Ceci nous montre qu'il est important d'évaluer l'erreur en des points qui n'ont pas servi à construire le modèle. On se rapproche par là de la notion de validation croisée, qui a pour but de déterminer le coefficient τ minimisant cette erreur. Nous ne nous étendons cependant pas sur cette méthode, pour laquelle le lecteur peut se référer à [Utr79], [Gir87], [Cha91].

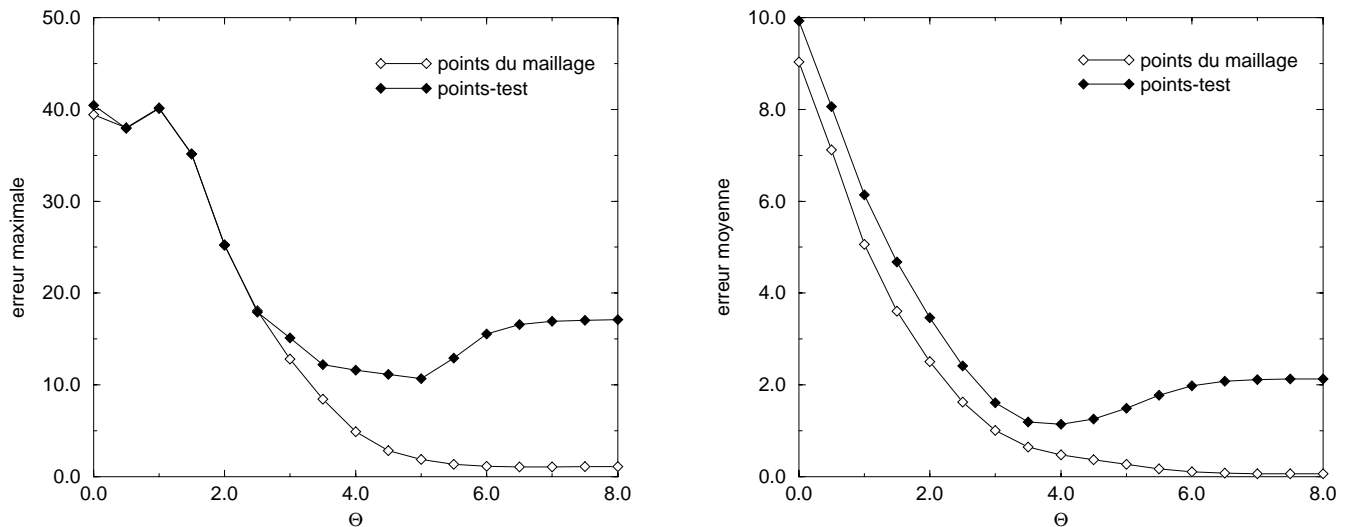


Figure 2.27: Représentation de l'erreur en fonction de $\theta = -\log \tau$

Nous avons finalement choisi $\tau = 10^{-4}$. Dans ce cas, les erreurs aux points-test sont :

$$E_{max}^{lis} = 11,58\% \qquad E_{moy}^{lis} = 1,14\%$$

On constate donc que les erreurs sont du même ordre pour le lissage et l'interpolation multilinéaire. Les données étant très peu bruitées, les deux modèles doivent logiquement rester comparables en termes de précision lorsqu'on les construit sur la totalité des mesures. L'évaluation de la fonction interpolante, qui comprend une somme de 8 termes (cf. 2.15), est avantageuse en comparaison de celle de la fonction spline, qui en comporte 64. De plus, chacun de ces termes est composé du produit de trois polynômes du premier degré pour la fonction interpolante, alors qu'ils sont du troisième degré pour la fonction spline. En revanche, la fonction spline présente une régularité au second ordre à laquelle ne peut prétendre la fonction interpolante, continue sur Ω mais non différentiable aux frontières des pavés Δ_{ijk} . Cette qualité peut être décisive, par exemple lorsque l'on cherche à calculer le gradient de la dose.

2.4.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons construit, pour un faisceau circulaire de diamètre 7 cm à 1 m de la source, un modèle de calcul de dose s'exprimant sous forme de fonctions spline tricubiques. Ce modèle, obtenu par une suite de lissages 1D et 2D, dépend principalement du maillage définissant l'espace de fonctions spline (paramètres n_z et n_r), ainsi que du coefficient τ pondérant lissage et moindres carrés. Nous avons réalisé une étude permettant de montrer l'influence de chacun de ces paramètres sur la qualité de la fonction approximante, puis d'en réaliser un choix acceptable en termes de précision. Il est clair qu'on ne peut envisager une telle étude pour chaque nouvelle modélisation : en pratique, quelques essais s'imposent pour le choix du maillage, l'optimisation se situant ensuite au niveau du paramètre τ . La comparaison avec une fonction d'interpolation multilinéaire nous a montré que les deux modèles ont une précision comparable : l'interpolation représente un bon compromis pour ce qui est du temps d'évaluation, alors que la fonction spline, par sa régularité, présente l'avantage de rester proche du modèle physique, notamment à cause du phénomène de diffusion. Notons par ailleurs que le lissage par fonctions spline fonctionne aussi bien pour des données régulièrement réparties que pour des données réparties aléatoirement : ce n'est évidemment pas le cas de l'interpolation multilinéaire.

Comme pour la méthode de Clarkson, le calcul de la dose pour un faisceau de position quelconque par rapport au milieu doit se faire avec une correction d'obliquité. Pour cela, on utilise à nouveau la méthode décrite au 2.3.3.

Chapitre 3

Le problème de la plus petite boule englobante

3.1 Introduction

Lors de la phase de dosimétrie clinique précédant un traitement, le radiophysicien, qui dispose d'une série de coupes scanner du patient, doit décider d'un certain nombre de paramètres définissant la balistique d'irradiation. Dans le cadre de la dosimétrie de la prostate, il s'agit, entre autres, de choisir un centre unique ("isocentre") qui sera le point de convergence des axes des différents faisceaux. Cette tâche, qui n'a qu'une importance relative lorsque les faisceaux sont de grande taille, peut réellement influencer sur la dosimétrie finale pour des faisceaux de petite taille, voire des minifaisceaux. Nous avons donc décidé d'automatiser le choix de l'isocentre, ce qui nous a permis d'intégrer réellement les données tridimensionnelles d'imagerie : en l'occurrence, il s'agit des points définissant la surface de la zone à irradier, et provenant d'une pré-segmentation réalisée par le praticien sur les différentes coupes scanner.

Beaucoup de manuels d'anatomie ([KLP89],[Rou78]) comparent la prostate à une châtaigne. Définir la zone à irradier comme une boule englobant la prostate semble donc *a priori* être un choix cohérent. Afin de "viser" au mieux la prostate, tout en évitant d'irradier les zones voisines, nous avons donc décidé de déterminer la plus petite boule l'englobant, et de positionner l'isocentre au centre de cette boule. On notera que cette approche s'inscrit parfaitement dans le contexte d'une irradiation par faisceaux circulaires à géométrie fixe, que nous avons prévue dans la partie dosimétrique. Dans ce cas, en effet, le rayon de la boule obtenue indique si la zone cible pourra ou non être incluse à l'intérieur de tous les faisceaux. L'équivalence entre les problèmes de plus petite boule et de plus petit cône a d'ailleurs été montrée par Lawson ([Law65]).

Une approche analogue a été réalisée par Mazal ([Maz90]) pour l'irradiation stéréotaxique de tumeurs cérébrales par des minifaisceaux. Il propose, pour le problème de plus petite boule englobante, un algorithme assez simple, qui nous aurait sans doute suffi. Nous avons cependant décidé d'explorer le côté mathématique de ce problème, et sommes parvenus à un algorithme fort efficace fonctionnant en dimension quelconque. Dans ce chapitre, nous commençons par donner un aperçu de l'abondante littérature de ce sujet, puis présentons notre algorithme sous un angle complètement géométrique et montrons, entre autres, qu'il converge en un nombre fini d'itérations. Nous l'interprétons enfin en termes d'optimisation et montrons qu'il s'agit en fait d'un algorithme de sous-gradient.

3.2 Présentation et données bibliographiques

Le problème de la plus petite boule englobante peut se formuler ainsi : considérons un espace affine \mathcal{A} de dimension finie d et $E = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ un ensemble de m ($m > 0$) points distincts inclus dans \mathcal{A} . Il s'agit de déterminer la boule de rayon minimal contenant E . Un tel problème appartient à la classe des problèmes dits "minimax", et s'exprime mathématiquement sous la forme :

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{O \in \mathcal{A}} \max_{i \in I} OP_i$$

où on a noté OP_i la distance euclidienne de O à P_i , et $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

En Recherche Opérationnelle, le problème (\mathcal{P}) correspond à la traduction de nombreuses applications pratiques. Les exemples classiques sont : un émetteur, que l'on désire positionner au mieux par rapport à un ensemble de récepteurs ; une installation, qui doit être rendue accessible à un certain nombre d'habitations, etc. De telles applications peuvent d'ailleurs mener à un problème plus général :

$$(\mathcal{P}') \quad \min_{O \in \mathcal{A}} \max_{i \in I} w_i OP_i$$

où les coefficients de pondération w_i sont des réels positifs.

Les problèmes (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') admettent chacun une unique solution. Dans le cas de (\mathcal{P}) , il est aisé de montrer que cette solution ne dépend que des points de E définissant son enveloppe convexe : le problème est donc inchangé si l'on écarte les autres points.

Bibliographie

Le problème de la plus petite boule englobante a, apparemment, été posé pour la première fois par Sylvester en 1857 ([Syl57]). C'est un classique dont la bibliographie, particulièrement fournie, ne cesse pourtant d'évoluer. Une des particularités de ce problème est la grande diversité des approches, qui peuvent être décrites, principalement, par deux critères. On distinguera, d'une part, les approches géométriques, de celles abordant (\mathcal{P})

comme un problème d'optimisation. D'autre part, certains articles se limitent au seul plan euclidien, alors que d'autres traitent le problème pour une dimension quelconque. Nous donnons ici une brève description, par ordre chronologique, des principaux algorithmes. Par ailleurs, on trouvera dans [HV82] une étude intéressante comparant quelques-uns de ces algorithmes et comportant notamment des tests numériques.

La première solution au problème (\mathcal{P}) fut découverte par **Peirce** et présentée par **Sylvester** en 1860 ([Syl60]), par **Chrystal** en 1885 ([Chr85]). L'idée est intuitive : il s'agit d'englober l'ensemble de points dans une boule de rayon suffisant, puis de diminuer ce rayon continûment jusqu'à ce qu'il soit minimal. Bien que Chrystal mentionne rapidement la dimension trois, l'algorithme est limité au plan et basé sur de simples propriétés des triangles. Chrystal montre par ailleurs la convergence en un nombre fini d'itérations, ce qui achève de nous convaincre de l'étonnante modernité de cet article pour son époque. Notons enfin que [HV82] propose une extension de cet algorithme au problème pondéré (\mathcal{P}').

Lawson, dans un très court article ([Law65]), présente, en dimension quelconque, un algorithme fort concis que nous pouvons citer :

1. $\forall i \in I \quad \lambda_i = 1/m$
2. $O = \sum_{P \in E} \lambda_P P, \quad \sigma = \sum_{i \in I} \lambda_i OP_i^2, \quad \tau = \max_{i \in I} OP_i^2$
3. **si** $(\tau - \sigma) < \epsilon$: **stop**
sinon : - $\forall i \in I \quad \lambda_i = \frac{\lambda_i OP_i}{\sum_{j \in I} \lambda_j OP_j}$
- **aller en 2.**

Le point O , initialisé à l'isobarycentre des points de E , est donc construit comme combinaison convexe de ces points, dont on fait varier les coefficients de pondération λ_i . $\sqrt{\tau}$ est le rayon de la plus petite boule de centre O et contenant E . Soit $\sqrt{\tau^*}$ la solution de (\mathcal{P}) ; alors Lawson montre :

$$\sigma \leq \tau^* \leq \tau$$

et affirme que σ croît strictement jusqu'à une situation stationnaire.

Kuhn ([Kuh75]), grâce à une approche duale de (\mathcal{P}), propose une interprétation physique du problème. Supposons que E constitue un système rigide de points matériels de masse totale 1, λ_i étant la masse du point P_i . Le centre de gravité de ces points est donc $O = \sum_{i \in I} \lambda_i P_i$, son moment d'inertie $\sum_{i \in I} \lambda_i OP_i^2$. Alors le dual de (\mathcal{P}) consiste à distribuer les masses λ_i de manière à maximiser le moment d'inertie du système. On constate ainsi que l'algorithme de Lawson résout directement ce problème dual.

Elzinga et **Hearn** ([EH72]) traitent le problème (\mathcal{P}) pour le seul plan euclidien en construisant une suite de cercles au rayon strictement croissant. Chaque itération com-

prend un sous-ensemble S_n de deux ou trois points de E , ainsi que le plus petit cercle C_n contenant S_n . L'itération suivante est ensuite construite en rajoutant à S_n un point extérieur à C_n . L'algorithme s'arrête lorsque C_n contient E . Cet algorithme est basé sur de nombreuses remarques géométriques permettant de résoudre rapidement le problème du plus petit cercle pour trois ou quatre points. Il peut être également étendu au problème pondéré ([HV82]), et son temps de calcul est en $O(m^2)$.

Shamos et **Hoey** ([SH75]) utilisent la notion de diagramme de Voronoï du point le plus éloigné. Rappelons que le FPVD (“furthest-point Voronoï diagram”) est une partition $\{V(P_i)\}_{i \in I}$ du plan en convexes non bornés ou vides : $V(P_i)$ est le lieu des points plus éloignés de P_i que de tout autre point de E ; c'est une intersection de demi-plans. Si $V(P_i)$ et $V(P_j)$ ont un côté en commun, on dit que P_i et P_j sont voisins dans le FPVD. Lorsque l'on relie par une arête chaque paire de voisins, on obtient le dual du FPVD : c'est la FPT (“furthest-point triangulation”). Notons enfin que seuls les points de E se situant sur la frontière de son enveloppe convexe déterminent le FPVD (cf. Fig. 3.1).

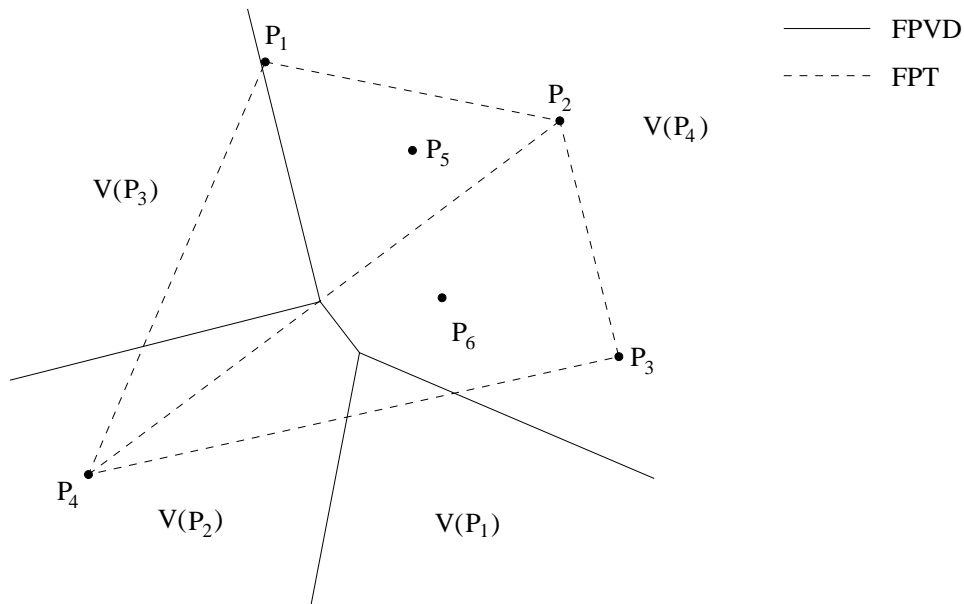


Figure 3.1: Diagramme de Voronoï du point le plus éloigné (FPVD) et son dual (FPT). On note que $V(P_5) = V(P_6) = \emptyset$, puisque P_5 et P_6 appartiennent à l'intérieur de l'enveloppe convexe de E . D'autre part, seules les régions $V(P_1)$ et $V(P_3)$ n'ont pas d'arête commune : P_1 et P_3 ne sont donc pas reliés dans la FPT.

L'algorithme est construit sur une propriété connue. Dans le plan, on sait, en effet, que le plus petit cercle contenant E est :

- soit déterminé par trois points dont il est le cercle circonscrit. Il est montré dans [SH75] que, dans ce cas, le centre du cercle est un sommet du FPVD. Celui-ci en comporte au plus $m - 2$.
- soit déterminé par les deux points les plus éloignés de E : ces points définissent le

diamètre de E . Shamos affirme ([Sha78]) que ce diamètre est représenté par l'arête la plus longue de la FPT.

Ainsi, on a largement réduit le nombre de points susceptibles d'être solution de (\mathcal{P}) : une fois le FPVD calculé, il suffit de déterminer lequel de ces points réalise le minimum. Cependant, il a été montré ([BT85]) que la seconde propriété de Shamos est fautive, et que le diamètre de E ne correspond pas toujours à l'arête la plus longue de la FPT. Toutefois, les auteurs démontrent également que l'algorithme reste valide.

Il est clair que la complexité de cet algorithme, en $O(m \log m)$, est dominée par le calcul du FPVD. Shamos et Hoey ([SH75]) ont conjecturé que cette complexité était optimale, conjecture qui, là encore, s'est avérée erronée avec l'apparition d'algorithmes en $O(m)$, que nous mentionnons ci-après.

L'approche de **Jacobsen** ([Jac81]), limitée au plan euclidien, inclut le problème sous sa forme pondérée. (\mathcal{P}') est abordé sous un angle strictement analytique, qui consiste à minimiser sur R^2 la fonction ϕ définie par :

$$\phi(u, v) = \max_{i \in I} w_i \sqrt{(u - x_i)^2 + (v - y_i)^2}$$

où (x_i, y_i) sont les coordonnées de P_i ($i \in I$).

Il s'agit ici d'une méthode de descente. En un point donné, on détermine le cône des directions de descente de ϕ . Si ce cône est vide, l'algorithme s'arrête. Dans le cas contraire, une direction particulière est choisie et un pas calculé. On déplace ensuite le point, et l'opération est réitérée. Jacobsen montre la convergence de son algorithme en utilisant, entre autres, la continuité de la direction et du pas de descente.

[HV82] donne une interprétation géométrique intéressante de l'algorithme de Jacobsen. En notant le fait que la direction choisie est la bissectrice du cône des directions de descente, il est montré que, dans le cas particulier du problème (\mathcal{P}) , les itérés sont les mêmes que ceux de l'algorithme de Chrystal-Peirce. L'algorithme de Jacobsen converge donc également en un nombre fini d'itérations.

Meggido ([Meg83]) est le premier à proposer un algorithme linéaire en temps pour le problème du plus petit cercle englobant. Il traite, en premier lieu, le problème *contraint* où l'on force le centre du cercle à rester sur une droite, et se sert ensuite de ce résultat pour développer un algorithme général. Cette méthode, basée sur une multitude de petites remarques, semble cependant peu concise en comparaison aux autres algorithmes.

Welzl ([Wel91]) adapte une idée de Seidel, développée dans le cadre de la programmation linéaire ([Sei90]), pour résoudre en dimension quelconque le problème de la plus petite boule, et, de manière plus générale, le problème du plus petit ellipsoïde. Cet algorithme fort original, qui est présenté sous une forme récursive, semble également très efficace puisque linéaire en temps. Cependant, un problème majeur, que l'on ne saurait

négliger, se pose à la mise en œuvre. En effet, pour des valeurs très élevées du nombre de points, il est quasiment impossible d'utiliser l'algorithme sous sa forme récursive. Par ailleurs, cet algorithme nécessite la programmation, en dimension d , de la plus petite *sphère* contenant $d + 1$ points, détail sur lequel l'auteur ne s'attarde guère.

La liste ci-dessus est loin d'être exhaustive. On pourra la compléter un tant soit peu par les approches intéressantes de Rademacher et Toeplitz ([RT57]), Smallwood ([Sma65]), Francis ([Fra67]), Bass et Schubert ([BS67]), Francis et White ([FW74]), Skyum ([Sky]). Melville ([Mel85]), enfin, reproche aux auteurs de donner trop peu de détails quant à la programmation de leurs algorithmes, en particulier pour ce qui est des approches géométriques, et des cas dégénérés qu'elles peuvent présenter. Il consacre un article entier à l'implémentation de deux de ces algorithmes.

Conclusion

On notera donc la grande variété d'approches du problème de la plus petite boule englobante. Les solutions géométriques sont, certes, les plus fréquentes, mais n'en sont pas moins très diverses. L'algorithme de Shamos et Hoey, qui utilise le diagramme de Voronoï du point le plus éloigné, est, en ce sens, le plus spécifiquement représentatif de la Géométrie Algorithmique. Il n'est cependant pas le plus aisé à mettre en œuvre, cet aspect ne représentant pas non plus une qualité des algorithmes à complexité linéaire (Meggido, Welzl). Par ailleurs, les algorithmes géométriques sont consacrés, pour la plupart, à la seule dimension 2, ce qui est assez limitatif. Or, il nous a semblé que l'algorithme de Chrystal-Peirce, qui est un algorithme assez efficace, était basé sur une idée suffisamment simple pour être transposé au cas multidimensionnel. C'est dans cette direction que nous avons orienté nos recherches. Nous nous sommes consacrés, dans un premier temps, à un travail qui, tout en restant basé sur la géométrie, avait pour but de nous libérer de la géométrie *du plan euclidien*. Nous avons ensuite éclairé ce travail d'un point de vue analytique, retrouvant ainsi l'analogie entre Chrystal-Peirce et Jacobsen.

3.3 L'algorithme de Chrystal-Peirce

Nous nous plaçons ici dans le cadre du plan euclidien. Comme nous l'avons précisé auparavant, l'algorithme de Chrystal-Peirce, qui est plus que centenaire ([Syl60],[Chr85]), est basé sur l'idée très simple qui consiste à enfermer l'ensemble de points E dans un cercle dont on fait diminuer le rayon. Chrystal, dans son article, ne se prive d'ailleurs pas de cette description très intuitive (“Let us diminish the radius of this circle continuously...”).

L'algorithme utilise principalement les deux propriétés suivantes, qui traitent le cas de trois points du plan :

Proposition 1 Soient trois points A, B, C : considérons le cercle de diamètre $[A, B]$. Alors si l'angle ACB est aigu, le point C est hors du cercle. S'il est obtus, le point C est dans le cercle. S'il est droit, le point C est sur le cercle.

Proposition 2 Le plus petit cercle contenant trois points est leur cercle circonscrit si le triangle qu'ils forment est aigu ou droit. C'est le cercle ayant pour diamètre le segment joignant les deux points les plus éloignés si le triangle qu'ils forment est obtus.

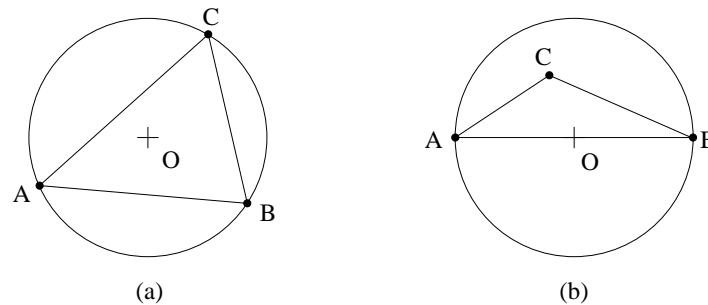


Figure 3.2: Plus petit cercle contenant trois points A, B, C , dans le cas d'un triangle aigu (a) et d'un triangle obtus (b)

L'algorithme

$n=1$;

Déterminer le polygone définissant l'enveloppe convexe de $E : F \subset E$;

$S_1 = \{A, B\}$ un côté quelconque de ce polygone;

1. Soit C le point qui minimise l'angle AMB pour $M \in F \setminus S_n$;

2. si l'angle ACB est obtus :

- le cercle recherché est le cercle de diamètre $[A, B]$;

- stop;

Soit C_{n+1} le cercle circonscrit au triangle (ABC) , de centre O_{n+1} ;

3. si le triangle (ABC) est aigu :

- le cercle recherché est C_{n+1} ;

- stop;

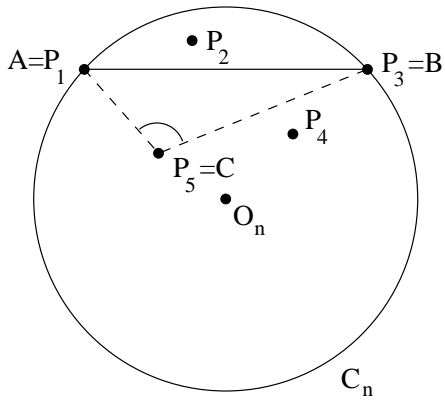
Soit S_{n+1} la paire de points formant le côté opposé à l'angle obtus;

Nommer A et B les deux points de S_{n+1} ;

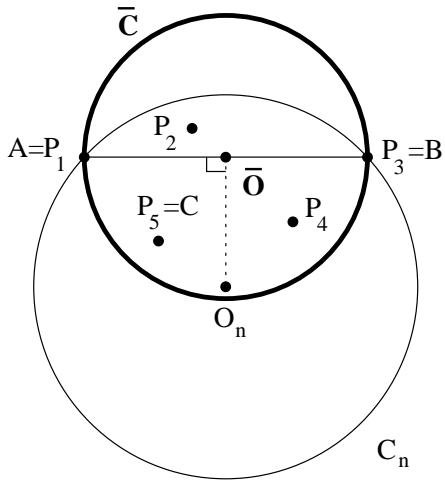
Incrémenter n ;

Aller en 1;

cas 1



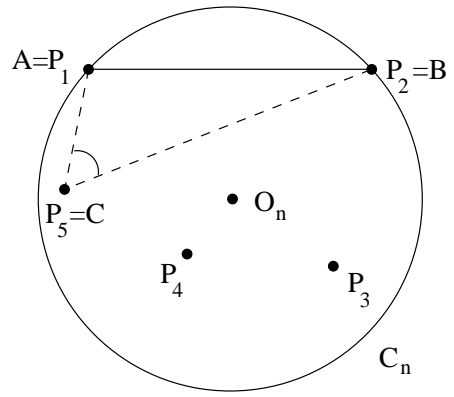
angle ACB obtus



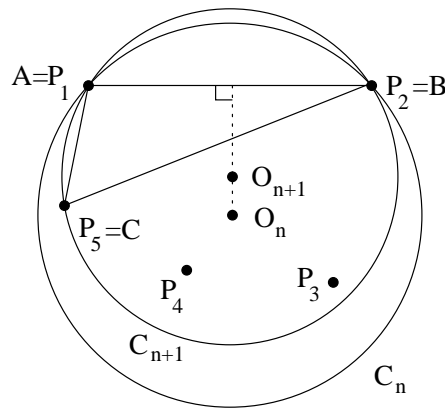
Algorithme de
Chrystal-Peirce

cas 2

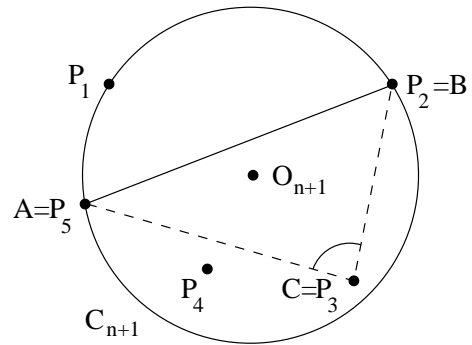
C minimise l'angle AMB



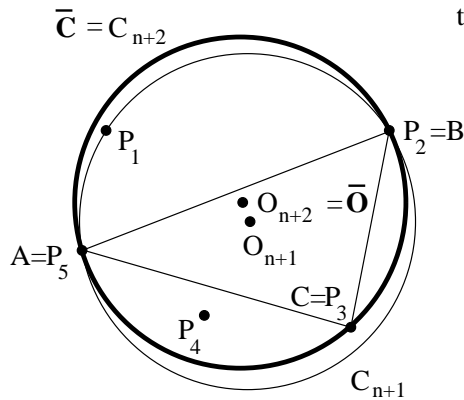
angle ACB aigu



triangle (ABC) obtus



angle ACB aigu,
triangle (ABC) aigu



Détaillons le déroulement de l’algorithme, que nous avons illustré. On notera, en premier lieu, que le cercle C_1 n’est pas défini. Chrystal précise que la droite portée par S_1 , qui est un côté du polygone, est en fait un cercle de rayon “infini”, et constitue en quelque sorte le C_1 idéal. L’étape consistant à ne conserver que les sommets du polygone qui définit l’enveloppe convexe de E , pourrait être appliquée à tous les algorithmes. Il est clair qu’elle est facultative. Ici, il suffit en effet d’initialiser C_1 par un cercle contenant E et passant par deux de ses points, A et B , que l’on pourra nommer “points de contact”. Notons que [NC71] et [CC81] proposent une optimisation de cette étape d’initialisation.

Passons maintenant à la boucle de l’algorithme. Celle-ci a pour but de déterminer le plus petit cercle contenant F et passant par les points de S_n (nommés A et B à chaque étape) : c’est ce qui explique que l’on recherche le point C qui minimise l’angle AMB :

- si l’angle ACB est obtus, alors c’est également le cas de tous les angles AMB ($M \in F \setminus S_n$) : F est donc inclus dans le cercle de diamètre $[A, B]$ (cf. Proposition 1). Ce cercle est donc bien le plus petit contenant F .
- si l’angle ACB n’est pas obtus, on considère le cercle C_{n+1} circonscrit au triangle (ABC) , de centre O_{n+1} (on note que O_n et O_{n+1} , centres de cercles passant par A et B , se situent sur la médiatrice de $[A, B]$). Ce cercle contient F : en effet, s’il existait $D \in F$ qui soit hors de C_{n+1} , on aurait : $ADB < ACB$, ce qui contredirait la définition de C :
 - si le triangle (ABC) est aigu, alors C_{n+1} est le plus petit cercle contenant les points A, B et C (cf. Proposition 2) : c’est donc le plus petit cercle contenant F .
 - si le triangle (ABC) est obtus, on réitère l’opération en choisissant pour S_{n+1} le côté opposé à l’angle obtus : le cas de l’angle ACB obtus ayant déjà été traité, on aura $S_{n+1} = \{A, C\}$ ou $S_{n+1} = \{B, C\}$.

On obtient par cette méthode une suite de cercles dont le rayon décroît (strictement, sauf cas particulier). En effet, C_n contient F et passe par les points de S_n , alors que C_{n+1} est *le plus petit cercle* vérifiant ces propriétés. Comme, de plus, il existe un nombre *fini* de possibilités pour S_n , on en conclut que l’algorithme est fini et converge en un nombre d’itérations majoré par $C_p^2 = \frac{p(p-1)}{2}$ (où p est le cardinal de F).

3.4 Généralisation de l’algorithme de Chrystal-Peirce au cas multidimensionnel

Comme nous avons pu le constater, l’algorithme de Chrystal-Peirce est relativement simple, et basé sur une idée qui pourrait vraisemblablement être utilisée en dimension quelconque. Cependant, cet algorithme, avec des tests portant sur la nature des angles et des

triangles, est exprimé sous une forme qui convient presque exclusivement au plan euclidien. *Presque*, car Chrystal ([Chr85]) s'est bien risqué à aborder la dimension trois dans des termes analogues. Le résultat, on pourra l'imaginer, n'est pas un modèle de concision!

Dans ce paragraphe, nous présentons l'approche qui, tout en se maintenant dans un formalisme géométrique, nous a permis de traiter le cas multidimensionnel. Nous exposons ensuite des résultats expérimentaux, qui montrent que l'algorithme obtenu peut être réellement performant, en particulier pour des dimensions élevées.

3.4.1 Notations et définitions

Rappelons que \mathcal{A} est un espace affine euclidien de dimension d et $E = \{P_i\}_{i \in I}$ un ensemble de m ($m > 0$) points distincts inclus dans \mathcal{A} . On considère ici le problème non pondéré :

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{O \in \mathcal{A}} \max_{i \in I} OP_i$$

(\mathcal{P}) peut être interprété comme la minimisation sur \mathcal{A} de la fonction Φ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{A} &\longrightarrow R \\ O &\longmapsto \max_{i \in I} OP_i \end{aligned}$$

Pour un point donné O , $\Phi(O)$ est le rayon de la plus petite boule *de centre* O qui contient E . Nous définissons les points de contact de cette boule avec E par :

$$I_O = \{i \in I / OP_i = \Phi(O)\}$$

On peut déjà noter que $I_O \neq \emptyset$.

Si $J \subset I$, nous définissons : $\tilde{J} = \text{Conv}(\{P_i / i \in J\})$, où nous avons noté *Conv* l'enveloppe convexe.

Les vecteurs seront notés en caractères gras. $\mathbf{AB.CD}$ est le produit scalaire entre les vecteurs \mathbf{AB} et \mathbf{CD} .

3.4.2 Résultats préliminaires

3.4.2.1 Caractérisation de la solution

Reprenons le cas de trois points A, B, C du plan (cf. Fig. 3.2) : O est le centre du plus petit cercle contenant ces trois points. On peut remarquer que, lorsque le triangle (ABC) est aigu, O , qui est aussi le centre du cercle circonscrit aux trois points, est situé à l'intérieur du triangle. Lorsque le triangle (ABC) est obtus, O est le milieu du segment joignant les deux points les plus éloignés. On constatera donc que, dans les deux cas, O appartient à l'enveloppe convexe des points de contact.

En réalité, cette propriété est vérifiée pour un nombre quelconque de points et en toute dimension : il s'agit d'une caractérisation de la solution du problème (\mathcal{P}). Ce résultat, connu dans le contexte des problèmes d'optimisation, semble avoir étonnamment peu inspiré les géomètres. Nous en donnons ici une démonstration qui sera à la base de notre algorithme.

Théorème 1 O est l'unique minimum de la fonction Φ si et seulement si $O \in \widetilde{I}_O$.

Ce que nous pouvons exprimer plus simplement par : O est le centre de la plus petite boule englobante si et seulement s'il appartient à l'enveloppe convexe des points de contact.

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin de la caractérisation de la projection d'un point O sur un convexe K , ou meilleure approximation de O sur K ([Lau72]). Rappelons que celle-ci est définie comme étant l'unique solution du problème suivant :

$$\min_{P \in K} OP$$

Lemme 1 Soient $O \in \mathcal{A}$ et $K \subset \mathcal{A}$ un ensemble convexe. Alors H est la projection de O sur K si et seulement si :

$$\forall P \in K \quad \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP} \leq 0$$

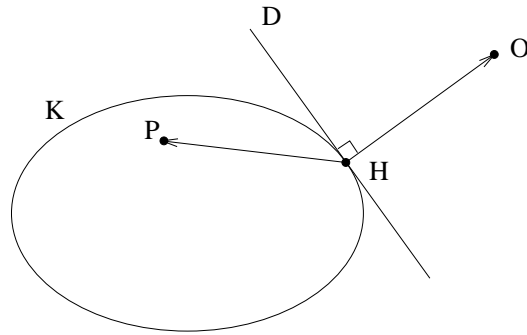


Figure 3.3: La droite D (ou, en dimension d , l'hyperplan $\mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP} = 0$) sépare K et le point O

Preuve du théorème. 1) Supposons que $O \notin \widetilde{I}_O$ et montrons que O n'est pas le minimum de Φ . Nous allons chercher un point O' tel que : $\Phi(O') < \Phi(O)$. Posons $\mathbf{OO}' = \alpha \cdot \mathbf{OH}$, où H est la projection de O sur \widetilde{I}_O et α un réel à déterminer tel que $0 < \alpha \leq 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in]0, 1] \quad \forall P \in \mathcal{A} \quad O'P^2 &= (\mathbf{OP} - \alpha \cdot \mathbf{OH})^2 \\ &= OP^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \mathbf{HP} \cdot \mathbf{HO} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire, pour les points de contact (cf. Lemme 1) :

$$\forall \alpha \in]0, 1] \quad \forall i \in I_O \quad O'P_i^2 \leq OP_i^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 < OP_i^2 = \Phi(O)^2$$

Si $I_O = I$, alors nous pouvons conclure immédiatement que $\Phi(O') < \Phi(O)$, et cela ne dépend pas de α . Sinon, $I \setminus I_O \neq \emptyset$, et nous pouvons écrire l'inégalité triangulaire pour les autres points :

$$\forall \alpha \in]0, 1] \quad \forall i \in I \setminus I_O \quad O'P_i \leq OP_i + \alpha.OH \leq M + \alpha.OH$$

où $M = \max_{i \in I \setminus I_O} OP_i$.

Il suffit de choisir α tel que :

$$M + \alpha.OH < \Phi(O) - \alpha < \frac{\Phi(O) - M}{OH}$$

Pour $0 < \alpha < \min(\frac{\Phi(O) - M}{OH}, 1)$, nous obtenons :

$$\forall i \in I \quad O'P_i < \Phi(O) - \alpha < \Phi(O)$$

O n'est donc pas minimum de la fonction Φ .

2) Supposons maintenant que $O \in \widetilde{I}_O$: nous allons prouver qu'il s'agit de l'unique minimum de la fonction Φ . Pour cela, considérons un point O' distinct de O , et montrons que $\Phi(O') > \Phi(O)$.

On notera d'abord qu'il existe un indice $i_0 \in I_O$ tel que : $\mathbf{OO'}.OP_{i_0} \leq 0$

En effet, supposons que : $\forall i \in I_O \quad \mathbf{OO'}.OP_i > 0$

Comme $O \in \widetilde{I}_O$, il existe une famille $\{\lambda_i\}_{i \in I_O}$ de réels positifs, l'un au moins étant non nul, telle que :

$$\sum_{i \in I_O} \lambda_i.OP_i = \mathbf{0}$$

Ceci implique :

$$0 = \mathbf{OO'}. \sum_{i \in I_O} \lambda_i.OP_i = \sum_{i \in I_O} \lambda_i.\mathbf{OO'}.OP_i > 0$$

ce qui est une contradiction.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} O'P_{i_0}^2 &= O'O^2 + OP_{i_0}^2 + 2.\mathbf{O'O}.OP_{i_0} \\ &= O'O^2 + \Phi(O)^2 + 2.\mathbf{O'O}.OP_{i_0} \geq O'O^2 + \Phi(O)^2 > \Phi(O)^2 \end{aligned}$$

Donc $\Phi(O') > \Phi(O)$. O est bien l'unique minimum de Φ . Δ

On notera une conséquence immédiate de ce théorème, qui est que le centre de la plus petite boule contenant E appartient toujours à l'enveloppe convexe de E .

3.4.2.2 Autres résultats et corollaires

Les résultats que nous montrons ici nous seront utiles par la suite, notamment pour prouver la convergence de l'algorithme en un nombre fini d'itérations.

Proposition 3 Soient $O \in \mathcal{A}$, H la projection de O sur \widetilde{I}_O , $J_O = \{i \in I_O / \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i = 0\}$. Alors $J_O \neq \emptyset$ et $H \in \widetilde{J}_O$.

Preuve. Nous savons (cf. Lemme 1) :

$$\forall i \in I_O \quad \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i \leq 0$$

Supposons que $J_O = \emptyset$, ce qui signifie :

$$\forall i \in I_O \quad \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i < 0$$

Par définition, $H \in \widetilde{I}_O$: il existe une famille $\{\lambda_i\}_{i \in I_O}$ de réels positifs, l'un au moins étant non nul, telle que :

$$\sum_{i \in I_O} \lambda_i \cdot \mathbf{HP}_i = \mathbf{0}$$

Ceci implique :

$$0 = \mathbf{HO} \cdot \sum_{i \in I_O} \lambda_i \cdot \mathbf{HP}_i = \sum_{i \in I_O} \lambda_i \cdot \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i < 0$$

Nous en concluons donc que $J_O \neq \emptyset$, et pouvons maintenant écrire :

$$0 = \sum_{i \in I_O} \lambda_i \cdot \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i = \sum_{i \in I_O \setminus J_O} \lambda_i \cdot \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i$$

Donc, nécessairement :

$$\forall i \in I_O \setminus J_O \quad \lambda_i = 0$$

Nous obtenons enfin :

$$\sum_{i \in J_O} \lambda_i \cdot \mathbf{HP}_i = \mathbf{0}$$

ce qui signifie exactement (l'un au moins des λ_i , $i \in J_O$, étant non nul) que $H \in \widetilde{J}_O$. Δ

Corollaire 1 Soient $O \in \mathcal{A}$, H la projection de O sur \widetilde{I}_O , $J_O = \{i \in I_O / \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i = 0\}$. Alors la boule \mathcal{B} de centre H et de rayon $\rho = \sqrt{\Phi(O)^2 - OH^2}$ est la plus petite boule contenant $\{P_i / i \in I_O\}$ et, également, la plus petite boule contenant $\{P_i / i \in J_O\}$.

Preuve. Nous pouvons écrire :

$$\forall i \in I_O \quad OP_i^2 = \Phi(O)^2 = OH^2 + HP_i^2 + 2 \cdot \mathbf{OH} \cdot \mathbf{HP}_i$$

Donc :

$$\forall i \in I_O \quad HP_i^2 = \Phi(O)^2 - OH^2 + 2 \cdot \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i \leq \Phi(O)^2 - OH^2 \quad (3.1)$$

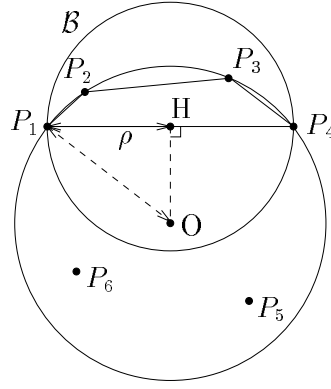


Figure 3.4: Nous avons ici : $I_O = \{1, 2, 3, 4\}$, $J_O = \{1, 4\}$. \widetilde{J}_O est donc le côté du polygone, défini par I_O , sur lequel est projeté O . En dimension 3, ce sera l'arête ou la face d'un polytope.

L'inégalité (3.1) est une égalité *si et seulement si* $i \in J_O$. Comme $J_O \neq \emptyset$ (cf. Proposition 3), nous avons donc :

$$\max_{i \in I_O} HP_i = \sqrt{\Phi(O)^2 - OH^2}$$

Ainsi, \mathcal{B} est la plus petite boule *de centre* H qui contient $\{P_i/i \in I_O\}$; ses points de contact avec cet ensemble sont $\{P_i/i \in J_O\}$. Or, d'après la Proposition 3, $H \in \widetilde{J}_O$: le Théorème 1 nous permet donc de conclure que \mathcal{B} est la plus petite boule contenant $\{P_i/i \in I_O\}$. De la même manière, c'est également la plus petite boule contenant $\{P_i/i \in J_O\}$. \triangle

Corollaire 2 Soient $O \in \mathcal{A}$, H la projection de O sur \widetilde{I}_O , R_{min} le rayon de la plus petite boule contenant E . Alors :

$$0 \leq \Phi(O) - R_{min} \leq \Phi(O) - \sqrt{\Phi(O)^2 - OH^2}$$

Preuve. La plus petite boule contenant E contient également $\{P_i/i \in I_O\}$. Nous pouvons donc écrire, d'après le Corollaire 1 :

$$\rho = \sqrt{\Phi(O)^2 - OH^2} \leq R_{min} \leq \Phi(O)$$

d'où la majoration obtenue. Si le majorant est suffisamment faible, alors on sait que $\Phi(O)$ est une bonne approximation de R_{min} . Ceci peut servir, par exemple, comme test d'arrêt pour un algorithme. \triangle

3.4.3 L'algorithme

Le point 1) de la démonstration du théorème de caractérisation (Théorème 1) nous inspire un algorithme dont le principe est analogue à celui de Chrystal-Peirce. Considérons un point $O \notin \widetilde{I}_O$ (O n'est donc pas minimum de Φ), et soit H la projection de O sur \widetilde{I}_O .

Nous “déplaçons continûment” O vers H jusqu’à obtenir un ou plusieurs nouveaux points de contact (cf. Fig. 3.5). On peut alors réitérer.

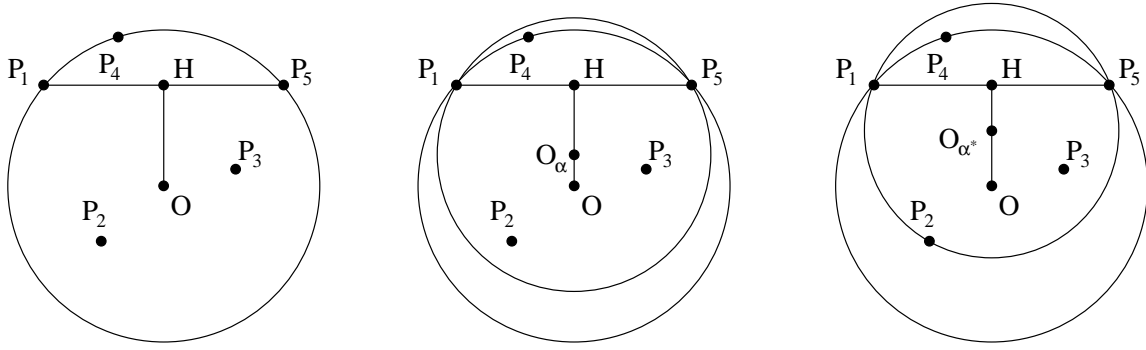


Figure 3.5: “Diminuons le rayon de ce cercle continûment” (Chrystal)

Construction de l’algorithme

Détaillons une itération de l’algorithme : nous considérons le point O_α défini par :

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad \mathbf{OO}_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{OH}$$

Pour $\alpha = 0$, nous avons donc $O_\alpha = O$, et nous voulons augmenter α jusqu’à ce que la boule de centre O_α et de rayon $\Phi(O_\alpha)$ contienne un nouveau point de contact. Nous avons :

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad \forall P \in \mathcal{A} \quad O_\alpha P^2 = OP^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}$$

Nous pouvons écrire, pour les points de contact :

$$\begin{aligned} \forall i \in I_O \quad O_\alpha P_i^2 &= \Phi(O)^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i \\ &\leq \Phi(O)^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les points de contact pour lesquels (3.2) est une égalité sont exactement les points de J_O (cf. 3.4.2.2). Nous avons montré, dans la Proposition 3, que $J_O \neq \emptyset$: il existe donc $i_0 \in J_O$ tel que :

$$O_\alpha P_{i_0}^2 = \Phi(O)^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2$$

Nous pouvons donc conclure :

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad \Phi(O_\alpha)^2 \geq \Phi(O)^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 \quad (3.3)$$

Pour $\alpha = 0$, cette inégalité est une égalité. Nous montrons que c’est le cas sur un intervalle $[0, \alpha^*] \subset [0, 1]$.

(3.3) est une égalité *si et seulement si* :

$$\begin{aligned} \forall i \in I \setminus I_O & \quad O_\alpha P_i^2 \leq \Phi(O)^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 \\ - & \quad 2 \cdot \alpha \cdot HO \cdot HP_i \leq \Phi(O)^2 - OP_i^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Soit $i \in I \setminus I_O$:

- si $HO \cdot HP_i \leq 0$: (3.4) est vérifiée au sens strict;
- si $HO \cdot HP_i > 0$: la condition sur P_i est $\alpha \leq \frac{\Phi(O)^2 - OP_i^2}{2 \cdot HO \cdot HP_i}$.

On peut donc déterminer α^* , $\alpha \in [0, 1]$ maximal tel que (3.4) soit vérifiée. Soit $K_O = \{i \in I \setminus I_O / HO \cdot HP_i > 0\}$. Alors :

- si $K_O = \emptyset$, il est clair que $\alpha^* = 1$;
- si $K_O \neq \emptyset$, la contrainte sur α peut s'écrire :

$$\alpha \leq \alpha_m = \min_{i \in K_O} \frac{\Phi(O)^2 - OP_i^2}{2 \cdot HO \cdot HP_i}$$

et on a : $\alpha^* = \min(\alpha_m, 1)$.

Nous obtenons donc finalement :

$$\forall \alpha \in [0, \alpha^*] \quad \Phi(O_\alpha)^2 = \Phi(O)^2 + \alpha \cdot (\alpha - 2) \cdot OH^2 < \Phi(O)^2 \quad (3.5)$$

Comme nous le souhaitions au départ, le rayon de la plus petite boule de centre O_α contenant E décroît continûment sur l'intervalle $[0, \alpha^*]$. La valeur $\alpha = \alpha^*$ correspond en fait à l'apparition de nouveaux points de contact.

Soit $L_O = \{i \in K_O / \frac{\Phi(O)^2 - OP_i^2}{2 \cdot HO \cdot HP_i} = \alpha^*\}$: alors J_O et L_O représentent les points pour lesquels les inégalités (3.2) et (3.4) sont des égalités. Ce sont les points de contact de la boule de centre O_{α^*} et de rayon $\Phi(O_{\alpha^*})$:

$$I_{O_{\alpha^*}} = J_O \cup L_O \quad (3.6)$$

Proposition 4 *Soit $\alpha^* \in [0, 1]$ déterminé comme précédemment. Alors $\alpha^* \neq 0$ et :*

- si $\alpha^* \in]0, 1[$, $L_O \neq \emptyset$;
- si $\alpha^* = 1$, O_{α^*} est le centre de la plus petite boule contenant E .

Preuve. $\alpha^* \neq 0$ car, soit $\alpha^* = \alpha_m > 0$, soit $\alpha^* = 1$.

- si $\alpha^* \in]0, 1[$, alors nécessairement $K_O \neq \emptyset$ et :

$$\alpha^* = \alpha_m = \min_{i \in K_O} \frac{\Phi(O)^2 - OP_i^2}{2 \cdot \mathbf{HO} \cdot \mathbf{HP}_i}$$

L_O , qui est l'ensemble des indices réalisant ce minimum, est donc non vide : les points correspondants sont les *nouveaux* points de contact.

- si $\alpha^* = 1$, on obtient, en se servant de la Proposition 3 : $O_{\alpha^*} = H \in \widetilde{J}_O \subset \widetilde{I}_{O_{\alpha^*}}$. Le Théorème 1 nous permet finalement de conclure que O_{α^*} est le centre de la plus petite boule englobante. Ce cas est important, car il justifie la contrainte $\alpha \in [0, 1]$ imposée au départ : il n'est jamais nécessaire d'aller au delà de 1. \triangle

L'algorithme

$n = 1$;

Soit $O_1 \in \mathcal{A}$ un point quelconque;

1. $\Phi(O_n) = \max_{i \in I} O_n P_i$;
 $I_n = \{i \in I / O_n P_i = \Phi(O_n)\}$;
 Soit H_n la projection de O_n sur \widetilde{I}_n ;
2. si $O_n = H_n$:
 - $\bar{O} = O_n$;
 - stop;
3. $K_n = \{i \in I \setminus I_n / \mathbf{H}_n \mathbf{O}_n \cdot \mathbf{H}_n \mathbf{P}_i > 0\}$;
si $K_n = \emptyset$:
 - $\alpha_n = 1$;
 - $\bar{O} = H_n$;
 - stop;
 $\alpha_n = \min_{i \in K_n} \frac{\Phi(O_n)^2 - O_n P_i^2}{2 \cdot \mathbf{H}_n \mathbf{O}_n \cdot \mathbf{H}_n \mathbf{P}_i}$;
4. si $\alpha_n \geq 1$:
 - $\alpha_n = 1$;
 - $\bar{O} = H_n$;
 - stop;
 $O_{n+1} = \alpha_n \cdot H_n + (1 - \alpha_n) \cdot O_n$;
 Incréments n ;
Aller en 1;

On définit, à chaque itération :

$$J_n = \{i \in I_n / \mathbf{H}_n \mathbf{O}_n \cdot \mathbf{H}_n \mathbf{P}_i = 0\} \quad L_n = \{i \in K_n / \frac{\Phi(O_n)^2 - O_n P_i^2}{2 \cdot \mathbf{H}_n \mathbf{O}_n \cdot \mathbf{H}_n \mathbf{P}_i} = \alpha_n\}$$

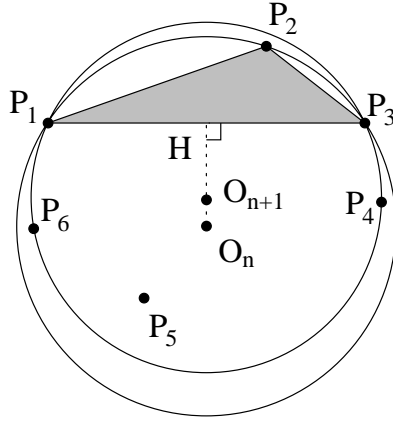


Figure 3.6: Une itération de l'algorithme : $I_n = \{1, 2, 3\}$, $J_n = \{1, 3\}$, $K_n = \{4, 5, 6\}$, $L_n = \{4, 6\}$, $I_{n+1} = J_n \cup L_n = \{1, 3, 4, 6\}$

Nous savons, d'après (3.6), que $I_{n+1} = J_n \cup L_n$. Nous pouvons, en premier lieu, remarquer que la distance de O_n à \widetilde{I}_n est strictement décroissante, ce qui montre la cohérence de l'algorithme avec le Théorème 1.

Preuve. D'une part, H_{n+1} est la projection de O_{n+1} sur \widetilde{I}_{n+1} . Par ailleurs, $H_n \in \widetilde{J}_n \subset \widetilde{I}_{n+1}$. Nous savons donc, d'après le Lemme 1, que :

$$\mathbf{H}_{n+1} \mathbf{O}_{n+1} \cdot \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{H}_n \leq 0$$

Il est aisé de prouver que cette inégalité signifie exactement que H_{n+1} appartient à la boule de diamètre $[O_{n+1}, H_n]$. Nous pouvons donc écrire :

$$O_{n+1} H_{n+1} \leq O_{n+1} H_n = (1 - \alpha_n) \cdot O_n H_n < O_n H_n \quad \triangle$$

On peut remarquer, dans le cadre du plan euclidien, le parallèle entre l'algorithme de Chrystal-Peirce et notre algorithme : le test 2 du premier (angle ACB obtus) correspond aux tests 3 ($K_n = \emptyset$) et 4 ($\alpha_n \geq 1$) du second ; de même, le test 3 du premier (triangle (ABC) aigu) correspond au test 2 ($O_n \in \widetilde{I}_n$) du second. On notera que l'algorithme de Chrystal-Peirce se base, à chaque itération, sur *deux* points de contact seulement (les points de S_n), alors que nous tenons compte directement de *tous* les points. C'est la seule différence entre les deux méthodes.

3.4.4 Convergence de l'algorithme

La suite $(\Phi(O_n))$ est strictement décroissante (cf. (3.5)), et minorée par 0 : elle admet donc une limite. Cependant, rien ne permet, *a priori*, d'affirmer que cette limite sera le minimum de Φ , et, d'autre part, que la suite (O_n) converge dans \mathcal{A} . La ressemblance avec Chrystal-Peirce laisserait toutefois entendre que notre algorithme converge en un nombre fini d'itérations. C'est ce que nous montrons dans ce paragraphe.

Proposition 5 *Le rayon ρ_n de la plus petite boule contenant $\{P_i/i \in I_n\}$ est strictement croissant.*

Preuve. Nous savons, d'après le Corollaire 1, que la plus petite boule contenant $\{P_i/i \in I_n\}$, qui est également la plus petite boule contenant $\{P_i/i \in J_n\}$, est \mathcal{B}_n , de centre H_n et de rayon $\rho_n = \sqrt{\Phi(O_n)^2 - O_n H_n^2}$. Nous supposons ici qu'il ne s'agit pas de la dernière itération de l'algorithme, ce qui implique (cf. Proposition 4) : $\alpha_n \in]0, 1[$, et donc $L_n \neq \emptyset$. Nous voulons prouver :

$$\forall n \quad \rho_n < \rho_{n+1}$$

Nous pouvons, en premier lieu, remarquer que $H_n \neq H_{n+1}$. Supposons que $H_n = H_{n+1}$, alors soit $j \in L_n$:

- $j \in L_n \subset K_n$: $H_n O_n \cdot H_n P_j > 0$
- $j \in L_n \subset I_{n+1}$: $H_{n+1} O_{n+1} \cdot H_{n+1} P_j \leq 0$ - $H_n O_{n+1} \cdot H_n P_j \leq 0$
- $(1 - \alpha_n) \cdot H_n O_n \cdot H_n P_j \leq 0$ - $H_n O_n \cdot H_n P_j \leq 0$

Nous avons donc une contradiction. Utilisons maintenant le Corollaire 1 pour écrire :

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \max_{i \in I_{n+1}} H_{n+1} P_i = \max_{i \in J_n \cup L_n} H_{n+1} P_i \\ &\geq \max_{i \in J_n} H_{n+1} P_i > \max_{i \in J_n} H_n P_i = \max_{i \in I_n} H_n P_i = \rho_n \quad \triangle \end{aligned}$$

Théorème 2 *L'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.*

Preuve. Le nombre de sous-ensembles de $E = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ est $\sum_{k=0}^m C_m^k = 2^m$, où les C_m^k sont les coefficients du binôme : $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. Ainsi, ρ_n , qui est le rayon de la plus petite boule contenant $\{P_i/i \in I_n\}$, peut prendre au plus 2^m valeurs distinctes. Comme nous avons prouvé que ρ_n est strictement croissant (cf. Proposition 5), nous pouvons conclure que l'algorithme s'arrête après au plus 2^m itérations. \triangle

2^m est un énorme majorant du nombre d'itérations : nous pouvons l'améliorer en nous servant du théorème de Carathéodory ([Ber]).

Théorème 3 (Carathéodory) *Soient \mathcal{A} un espace affine de dimension d , et $\{P_1, \dots, P_m\}$ m points. Alors $P \in \text{Conv}(\{P_1, \dots, P_m\})$ si et seulement si :*

$$\exists q \leq d + 1 \quad \exists \{i_1, \dots, i_q\} \subset \{1, \dots, m\} \quad P \in \text{Conv}(\{P_{i_1}, \dots, P_{i_q}\})$$

En utilisant nos notations, ceci s'exprime sous la forme :

$$P \in \tilde{I} \quad - \quad \exists J \subset I \quad \text{Card}(J) \leq d + 1 \quad P \in \tilde{J}$$

Proposition 6 *On suppose $m \geq d$. Alors $\sum_{k=0}^d C_m^k$ est un majorant du nombre d'itérations de l'algorithme.*

Preuve. Utilisons le Théorème 3 :

- d'une part, la définition de $J_n = \{i \in I_n / \mathbf{H}_n \mathbf{O}_n \cdot \mathbf{H}_n \mathbf{P}_i = 0\}$ nous montre que $\{P_i / i \in J_n\}$ est inclus dans un hyperplan affine, sous-espace affine de \mathcal{A} de dimension $d - 1$ (nous supposons ici $H_n \neq O_n$: sinon, l'algorithme s'arrête) ;
- d'autre part, nous savons, d'après la Proposition 3, que $H_n \in \widetilde{J}_n$.

D'après le théorème de Carathéodory, nous pouvons donc trouver $\Omega_n \subset J_n$ tel que $\text{Card}(\Omega_n) \leq d$ et $H_n \in \widetilde{\Omega}_n$.

Par ailleurs, nous avons, d'après le Corollaire 1 :

$$\forall i \in \Omega_n \subset J_n \quad H_n P_i = \rho_n$$

Le Théorème 1 nous permet donc de conclure que la boule \mathcal{B}_n de centre H_n et de rayon ρ_n est la plus petite boule contenant $\{P_i / i \in \Omega_n\}$. Or, le nombre de sous-ensembles de $E = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ dont le cardinal est inférieur ou égal à d est $\sum_{k=0}^d C_m^k$, qui majore ainsi le nombre de valeurs distinctes prises par ρ_n . ρ_n étant strictement croissant (cf. Proposition 5), on en conclut que l'algorithme converge en au plus $\sum_{k=0}^d C_m^k$ itérations. \triangle

Nous avons donc prouvé que le nombre d'itérations de notre algorithme a une majoration polynômiale. Notons que, pour des valeurs élevées de m :

$$\sum_{k=0}^d C_m^k \sim \frac{m^d}{d!}$$

Rien ne prouve qu'il s'agit là d'un bon majorant. Les résultats expérimentaux ont pour objectif, entre autres, de nous éclaircir sur ce point.

3.4.5 Mise en œuvre

3.4.5.1 Implémentation

L'implémentation de notre algorithme ne comporte, en fait, qu'un seul point "délicat". La projection, à chaque itération, de O_n sur \widetilde{I}_n constitue, en effet, un problème à part entière :

$$H_n = \arg \min_{P \in \widetilde{I}_n} O_n P^2$$

Ecrivons sous forme algébrique la projection d'un point $O \in \mathcal{A}$ sur $\text{Conv}(\{P_1, \dots, P_k\})$. Si l'on se place dans un repère donné de \mathcal{A} , on note par X_M le vecteur, de taille d , des coordonnées de M dans ce repère. Nous savons :

$$\text{Conv}(\{P_1, \dots, P_k\}) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i / \forall i \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

Pour $P \in \text{Conv}(\{P_1, \dots, P_k\})$, nous pouvons donc écrire :

$$X_P = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_{P_i} = A\lambda$$

A est une matrice de dimensions $d \times k$, et λ un vecteur de taille k :

$$A = (X_{P_1} \ X_{P_2} \ \dots \ X_{P_k}) \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$OP^2 = (A\lambda - X_O)^t (A\lambda - X_O) = \lambda^t A^t A \lambda - 2X_O^t A \lambda + X_O^t X_O$$

Ainsi, la projection de O sur $\text{Conv}(\{P_1, \dots, P_k\})$ se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle quadratique $J(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^t Q \lambda + c^t \lambda$ sur l'ensemble de contraintes linéaires $K = \{\lambda \in (\mathbb{R}_+)^k / \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$. La matrice $Q = A^t A$ est symétrique, positive. Il est clair qu'elle est définie *si et seulement si* $\ker A = \{0\}$, donc *si et seulement si* le rang de A vaut k . En se replaçant dans notre contexte, on sait donc que, si le nombre de points de contact est strictement supérieur à la dimension ($k > d$), la matrice Q n'est pas définie.

Il existe, pour ce problème classique, de nombreux algorithmes, figurant dans toutes les bibliothèques mathématiques. Nous avons, pour notre part, choisi l'implémentation de Powell ([Pow85]), basée sur la méthode de Goldfarb et Idnani ([GI83]) et utilisée dans la bibliothèque IMSL.

Il y a un autre détail à noter quant à l'implémentation de l'algorithme. En effet, nous avons énoncé celui-ci sous une forme théorique qu'il faut légèrement modifier pour une exploitation numérique. Ainsi, on est amené à définir une précision ε , telle que deux distances d et d' sont "numériquement égales" si et seulement si $|d - d'| \leq \varepsilon$. ε est donc homogène à une distance euclidienne de \mathcal{A} , et intervient finalement :

- pour la recherche des points de contact :

$$I_n^\varepsilon = \{i \in I / \Phi(O_n) - O_n P_i \leq \varepsilon\}$$

- pour le test $O_n = H_n$, qu'on remplace par $O_n H_n \leq \varepsilon$.

Par la suite, la précision adoptée est toujours $\varepsilon = 10^{-5}$.

3.4.5.2 Résultats

Pour la présentation des résultats expérimentaux, nous procédons en deux temps. En premier lieu, pour un ensemble de points et une initialisation donnés, nous illustrons le déroulement de l'algorithme et vérifions quelques propriétés montrées précédemment. Ensuite, nous testons l'efficacité de l'algorithme en faisant varier le nombre de points et la dimension. Ces tests numériques ont été effectués sur une machine DEC4000 à processeur *Alpha* (165 MHz), instrument particulièrement puissant. Il convient donc d'être prudent dans l'appréciation des temps d'exécution (temps CPU), qui sont à juger dans leur globalité plus qu'individuellement.

Déroulement de l'algorithme

En dimension 2, nous avons repris l'exemple simple de la Figure 3.1 et représenté en niveaux de gris la fonction Φ correspondante (cf. Fig. 3.7) : on reconnaîtra, à travers les points anguleux des lignes de niveau, les frontières du diagramme de Voronoï du point le plus éloigné. Deux points d'initialisation différents ont été choisis, volontairement éloignés de la solution. La convergence de l'algorithme se fait en deux et trois itérations. De manière tout à fait générale, le nombre de points de contact est au moins égal à deux, la première itération mise à part. Ainsi, on pourra remarquer que le point O_n ($n \geq 2$) se déplace toujours sur les frontières du diagramme de Voronoï.

Afin d'obtenir une comparaison, nous avons également programmé le très court algorithme de Lawson (cf. page 63), qui est systématiquement initialisé à l'isobarycentre de l'ensemble de points. 126 itérations sont nécessaires pour $\epsilon = 10^{-2}$, 443 itérations pour $\epsilon = 10^{-5}$. On constate donc la faible efficacité de cet algorithme, qui devient complètement inutilisable lorsqu'on augmente la dimension et le nombre de points.

Nous avons ensuite considéré un ensemble de $m = 5000$ points en dimension $d = 10$, uniformément répartis dans la boule unité, et initialisé l'algorithme au point O_1 dont toutes les composantes sont égales à 1,5. La convergence a nécessité 29 itérations, et nous avons pu représenter en fonction de n (ordre de l'itération) :

- $R_n = \Phi(O_n)$, rayon de la plus petite boule de centre O_n contenant l'ensemble de points;
- $\rho_n = \sqrt{\Phi(O_n)^2 - O_n H_n^2}$, rayon de la plus petite boule contenant les points de contact;
- $O_n H_n$, distance de O_n aux points de contact;
- $O_n O_{n+1}$, pas de l'algorithme;
- $Card(I_n)$, nombre de points de contact.

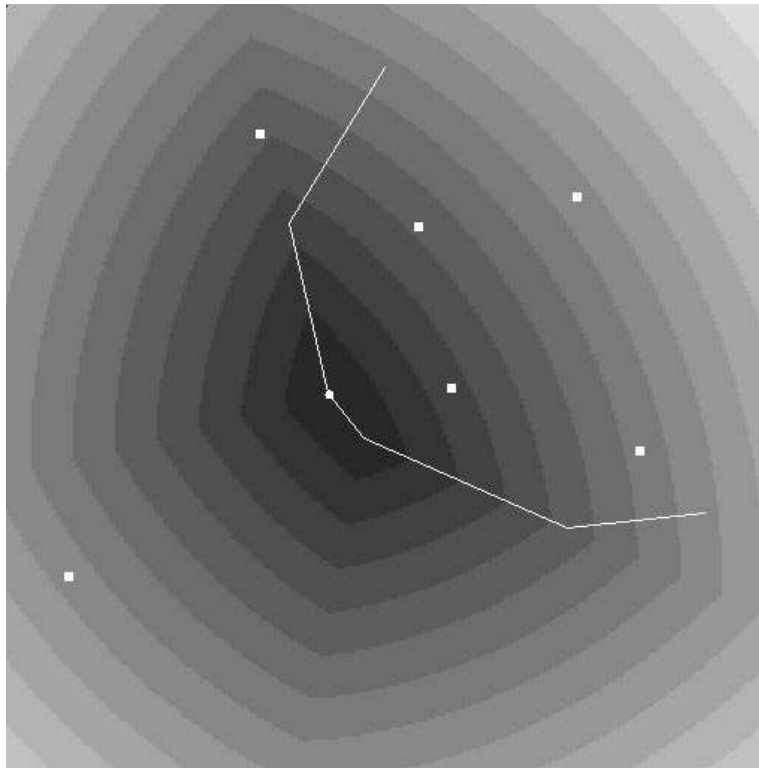


Figure 3.7: Déroulement de l’algorithme pour deux initialisations différentes : on parvient à la solution en deux et trois itérations.

On remarquera (cf. Fig. 3.8) que les suites (R_n) et (ρ_n) sont adjacentes : (R_n) est décroissante, (ρ_n) est croissante, et les deux suites ont la même limite. On pourrait donc se contenter d’arrêter l’algorithme dès que $R_n - \rho_n < \varepsilon$ (cf. Corollaire 2).

Pour ce qui est du nombre de points de contact (cf. Fig. 3.9), on notera que celui-ci “croît globalement” entre 1 et $d + 1$. Nous avons pu constater, au cours d’autres tests, que cette courbe est quasiment monotone lorsque m est faible (de l’ordre de d), et devient irrégulière pour m élevé. Par ailleurs, on peut remarquer que, sauf à la fin de l’algorithme, le nombre de points de contact reste inférieur à d . Dans ce cas, la matrice Q définissant la projection de O_n sur \widetilde{T}_n est donc définie.

Performances de l’algorithme

Nous avons testé les performances de l’algorithme en fonction du nombre de points m et de la dimension d . Les ensembles de points ont été choisis aléatoirement dans la boule unité d’une part, dans le cube unité $([0, 1]^d)$ d’autre part. Le point d’initialisation O_1 , dont ne dépend pas la convergence de l’algorithme, a été choisi aléatoirement hors de l’enveloppe convexe de E . Nous avons, dans chaque cas, relevé le nombre total d’itérations (n), le temps total d’exécution (T), et le temps moyen d’exécution par itération (τ). Tous les résultats fournis proviennent de la moyenne sur dix essais différents.

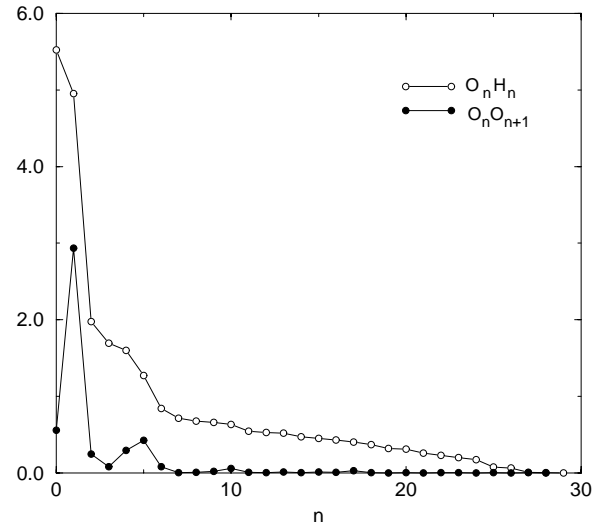
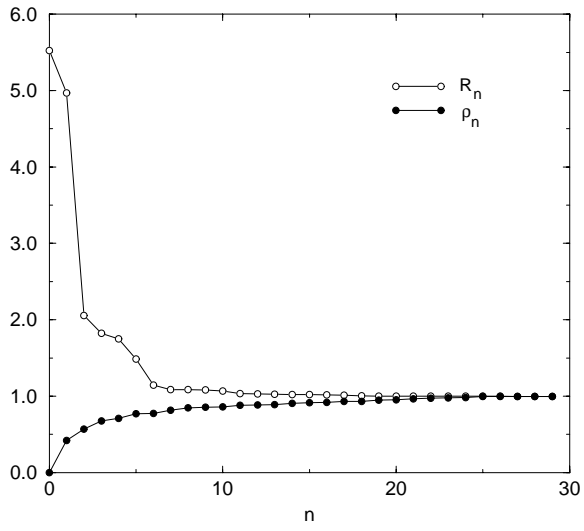


Figure 3.8: Représentation des différentes variables au cours de l'algorithme

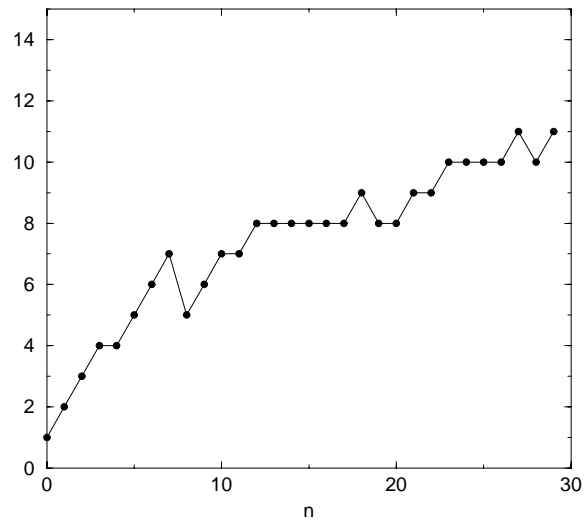


Figure 3.9: Représentation du nombre de points de contact au cours de l'algorithme

| | boule unité | | | cube unité | | |
|----------------|-------------|---------------------|-------------|------------|---------------------|-------------|
| m | n | $T(s)$ | τ (ms) | n | T (s) | τ (ms) |
| 10 | 3,8 | $1,8 \cdot 10^{-3}$ | 0,45 | 6,3 | $3,7 \cdot 10^{-3}$ | 0,6 |
| 50 | 7,5 | $6,6 \cdot 10^{-3}$ | 0,88 | 11,2 | 10^{-2} | 0,9 |
| 100 | 11 | $1,6 \cdot 10^{-2}$ | 1,4 | 12 | $1,8 \cdot 10^{-2}$ | 1,5 |
| 500 | 21,1 | 0,11 | 5,2 | 15,4 | $8 \cdot 10^{-2}$ | 5,2 |
| 1000 | 24,2 | 0,24 | 9,8 | 18,3 | 0,18 | 9,8 |
| 5000 | 32,1 | 1,5 | 46 | 19,4 | 0,91 | 47 |
| 10^4 | 35,2 | 3,2 | 92 | 21 | 2 | 94 |
| $5 \cdot 10^4$ | 41,7 | 21 | 496 | 22 | 11 | 503 |
| 10^5 | 42,6 | 42 | 995 | 23 | 23 | 1010 |

Table 3.1: Résultats en fonction du nombre de points m en dimension 10

| | boule unité | | | cube unité | | |
|-----|-------------|---------|-------------|------------|-------------------|-------------|
| d | n | T (s) | τ (ms) | n | T (s) | τ (ms) |
| 2 | 5,3 | 0,14 | 27 | 2,6 | $8 \cdot 10^{-2}$ | 31 |
| 3 | 10,9 | 0,3 | 28 | 4,9 | 0,15 | 30 |
| 5 | 15,6 | 0,51 | 33 | 10 | 0,34 | 34 |
| 10 | 31,9 | 1,5 | 46 | 19,8 | 0,93 | 47 |
| 20 | 52,6 | 3,9 | 74 | 35,5 | 2,6 | 74 |
| 30 | 66,6 | 6,9 | 104 | 43,4 | 4,5 | 103 |
| 40 | 79 | 11 | 133 | 47,5 | 6,2 | 131 |
| 50 | 83,5 | 14 | 165 | 54 | 8,6 | 159 |

Table 3.2: Résultats en fonction de la dimension d pour 5000 points

| | boule unité | | | cube unité | | |
|-----|-------------|---------|------------|------------|---------|------------|
| d | n | T (s) | τ (s) | n | T (s) | τ (s) |
| 2 | 7,4 | 4 | 0,55 | 2,9 | 1,8 | 0,63 |
| 3 | 12,6 | 7,5 | 0,6 | 4,4 | 2,9 | 0,67 |
| 5 | 21,9 | 16 | 0,72 | 10,2 | 7,6 | 0,75 |
| 10 | 43,7 | 44 | 1 | 21,3 | 22 | 1 |
| 20 | 84 | 134 | 1,6 | 42 | 67 | 1,6 |
| 30 | 118,9 | 267 | 2,2 | 57,7 | 131 | 2,3 |
| 40 | 143,5 | 406 | 2,8 | 60,6 | 173 | 2,9 |
| 50 | 166,4 | 585 | 3,5 | 69,4 | 241 | 3,5 |

Table 3.3: Résultats en fonction de la dimension d pour 10^5 points

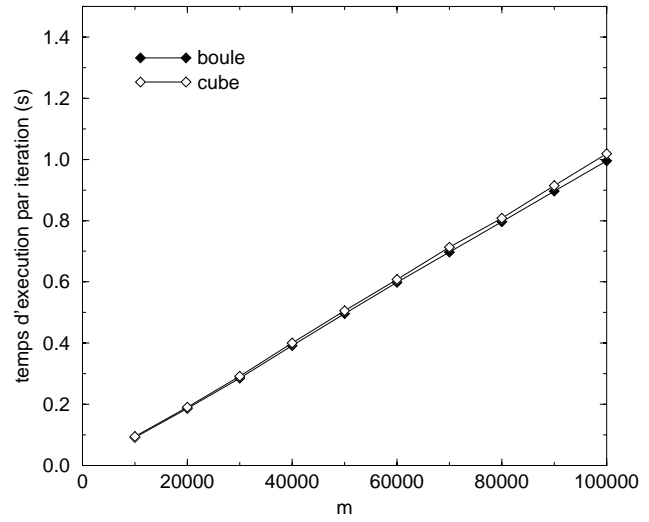
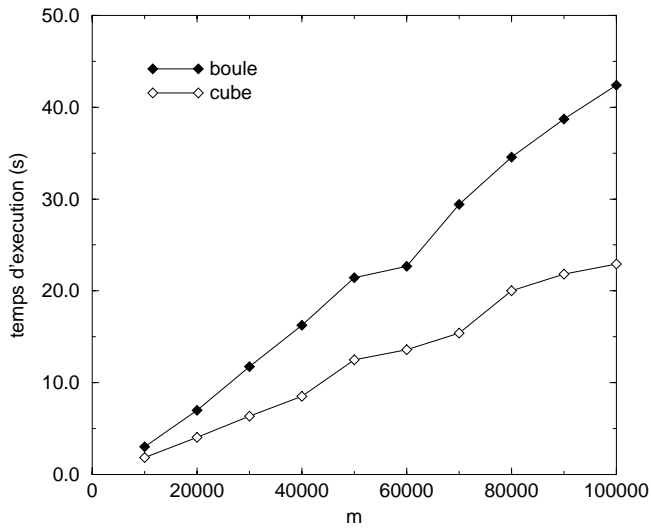


Figure 3.10: En dimension 10, représentation du temps d'exécution de l'algorithme et du temps d'exécution par itération en fonction du nombre de points m

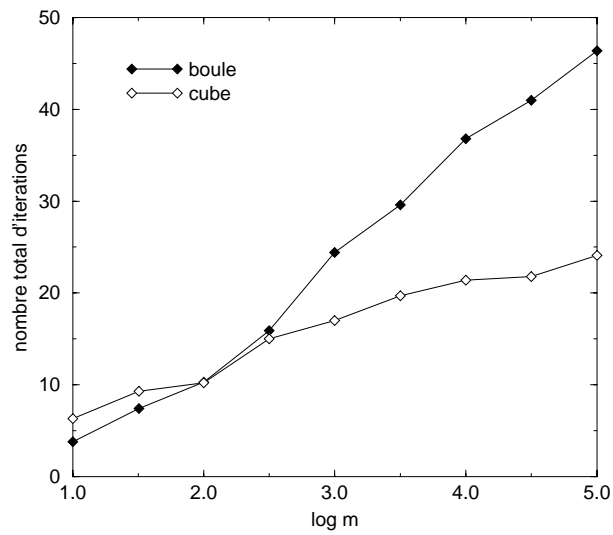


Figure 3.11: En dimension 10, représentation du nombre total d'itérations en fonction du nombre de points m (échelle logarithmique)

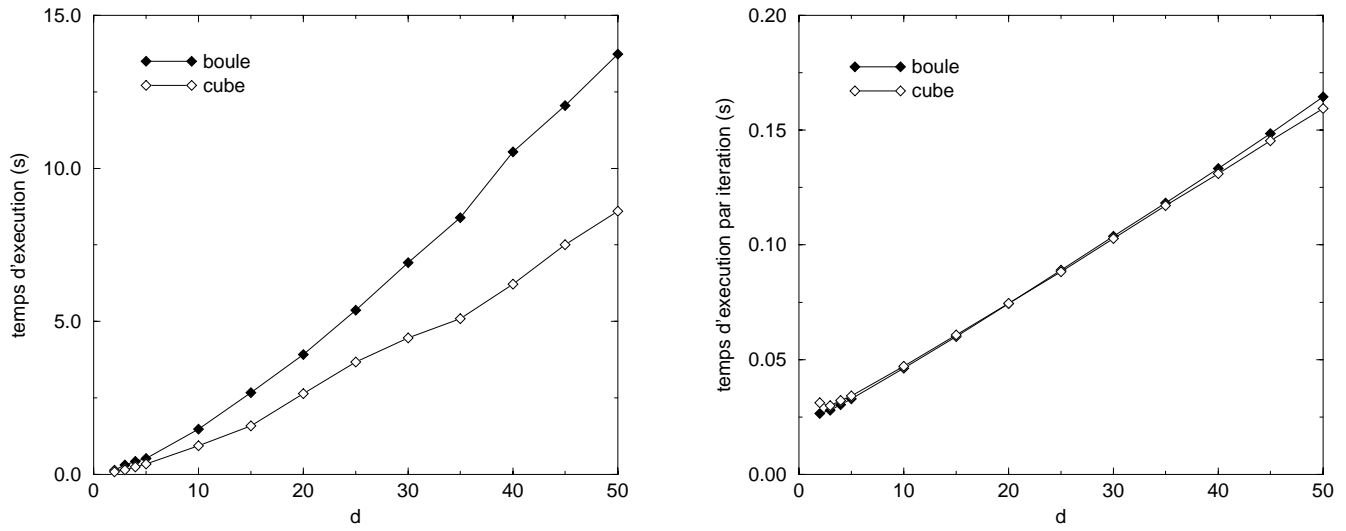


Figure 3.12: Pour 5000 points, représentation du temps d'exécution de l'algorithme et du temps d'exécution par itération en fonction de la dimension d

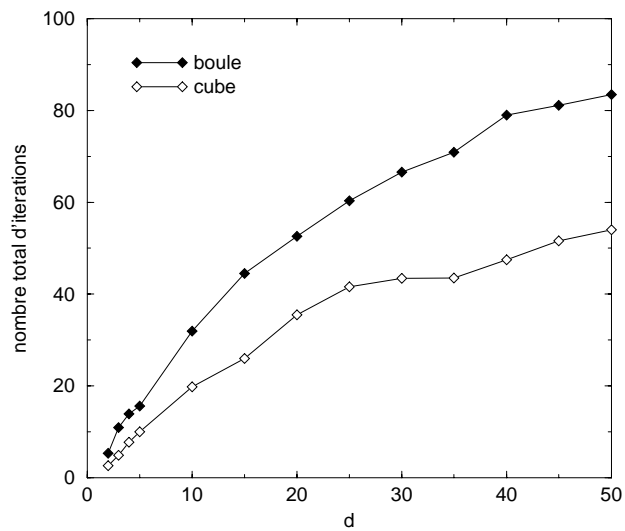


Figure 3.13: Pour 5000 points, représentation du nombre total d'itérations en fonction de la dimension d

En dimension 10, nous avons testé des ensembles dont le cardinal varie entre 10 et 10^5 (cf. Table 3.1, Fig. 3.10, Fig. 3.11). Ensuite, pour des ensembles de 5000 et 10^5 points, l'algorithme a été exécuté dans des dimensions allant de 2 à 50 (cf. Table 3.2, Table 3.3, Fig 3.12, Fig. 3.13). On note, en premier lieu, que l'algorithme est toujours plus long pour des points répartis dans la boule unité que pour des points répartis dans le cube unité. Intuitivement, cela s'explique aisément par le fait que, dans le cas du cube, le nombre de points susceptibles d'être des points de contact est nettement réduit : il s'agit des points proches des sommets du cube. On notera cependant que, dans les deux cas, les courbes représentant les temps d'exécution par itération sont linéaires et confondues (cf. Fig. 3.10, Fig. 3.12).

On constate, de manière générale, que le nombre total d'itérations de l'algorithme reste très modeste, même pour des valeurs élevées de m ou de d . Considérons, par exemple, le cas où $d = 10$ et $m = 10^5$, les points étant répartis dans la boule unité : l'algorithme converge en 43 itérations, alors que le majorant de la Proposition 6 vaut $\sum_{k=0}^d C_m^k \simeq 2,8 \cdot 10^{43}$! Il est clair, enfin, que les résultats seraient améliorés par une initialisation à l'isobarycentre de E . Pour le même exemple, on passe ainsi de 43 itérations à 14 itérations.

3.5 Approche analytique du problème de la plus petite boule englobante

L'algorithme présenté au paragraphe 3.4, bien que développé dans un esprit essentiellement géométrique, correspond, typiquement, à un algorithme de descente. L'analyse nous propose un grand nombre de ces méthodes itératives, qui consistent à se déplacer "pas à pas", et dans des directions bien choisies, vers le minimum d'une fonctionnelle. Il nous a donc semblé important d'explorer ce domaine, afin de replacer notre algorithme dans un contexte qui, somme toute, est également le sien.

Dans cette partie, nous effectuons d'abord quelques rappels concernant les problèmes de minimisation et les méthodes permettant de les résoudre. Nous nous intéressons ensuite au cas où la fonctionnelle à minimiser est la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions, et traitons à nouveau le problème de la plus petite boule englobante. Nous constatons, ainsi, que notre algorithme est en fait une méthode de *sous-gradient*. Divers résultats numériques sont ensuite présentés.

On pourra se référer aux ouvrages, classiques, de Ciarlet ([Cia85]) et Laurent ([Lau72]), ainsi qu'au livre assez complet de Bazaraa et Shetty ([BS]).

3.5.1 Généralités

Soit \mathcal{U} un espace vectoriel de dimension finie, muni du produit scalaire euclidien, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme induite sera notée $\| \cdot \|$. Soit F une fonction définie sur \mathcal{U} , à valeurs

dans R , *convexe* et *continue*. On considère le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$(\mathcal{Q}) \quad \min_{x \in \mathcal{U}} F(x)$$

Nous supposons que (\mathcal{Q}) admet une unique solution \bar{x} . En pratique, l'existence ou l'unicité de la solution peuvent souvent se déduire de différentes propriétés de F . Notamment :

- si F est coercive ($F(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$), (\mathcal{Q}) admet au moins une solution;
- si F est *strictement* convexe, la solution, lorsqu'elle existe, est unique;
- si F est a -convexe ($a > 0$), (\mathcal{Q}) admet une unique solution.

Rappelons que F est a -convexe (ou *fortement* convexe, ou encore elliptique) si, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}^2$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) - \frac{a}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2 \quad (3.7)$$

Une telle fonction est à la fois coercive et strictement convexe.

La fonction F étant convexe et continue, elle admet en tout point $x \in \mathcal{U}$ et pour toute direction $d \in \mathcal{U}$ une **dérivée directionnelle** finie :

$$F'(x; d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + td) - F(x)}{t}$$

Soit $x \in \mathcal{U}$. On dit que $d \in \mathcal{U}$ est une **direction de descente** de F en x si :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall t \in]0, \alpha] \quad F(x + td) < F(x)$$

En utilisant la convexité de F , on montre que cette définition équivaut à chacune des deux propriétés suivantes :

$$1. \quad \exists \alpha > 0 \quad F(x + \alpha d) < F(x) \quad (3.8)$$

$$2. \quad F'(x; d) < 0 \quad (3.9)$$

Notons $\Delta(x)$ l'ensemble des directions de descente de F en $x \in \mathcal{U}$, qui est un cône. $\Delta(x)$ permet une **caractérisation** de la solution de (\mathcal{Q}) :

$$x \text{ est solution de } (\mathcal{Q}) \quad - \quad \Delta(x) = \emptyset \quad (3.10)$$

Les **algorithmes de descente** ont pour but de construire une suite (x_n) qui converge vers la solution \bar{x} selon le schéma itératif suivant :

- soit x_0 un point d'initialisation;

- au point x_n , on choisit une direction de descente d_n et un pas $\alpha_n > 0$ tel que $F(x_n + \alpha_n d_n) < F(x_n)$;
- le nouvel itéré est défini par : $x_{n+1} = x_n + \alpha_n d_n$;
- on arrête l'algorithme lorsqu'un test de convergence est vérifié.

Il est clair que la spécificité des algorithmes de descente va résider dans le choix des directions et des pas. La régularité de la fonction est, à ce niveau, très importante. Nous allons donc distinguer le cas où F est différentiable du cas où elle ne l'est pas.

3.5.1.1 Cas différentiable

On rappelle que la fonction F est **différentiable** en $x \in \mathcal{U}$ s'il existe une application linéaire $L_x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall d \in \mathcal{U} \quad F(x + d) = F(x) + L_x(d) + o(\|d\|) \quad (3.11)$$

Le théorème de Riesz permet de prouver l'existence d'un vecteur **gradient** de F en x , noté $\nabla F(x)$, tel que :

$$\forall d \in \mathcal{U} \quad L_x(d) = \langle \nabla F(x), d \rangle$$

Par ailleurs, on vérifie immédiatement que $F'(x; d) = L_x(d)$.

On obtient donc l'ensemble des **directions de descente** en $x \in \mathcal{U}$ (cf. (3.9)), qui est un demi-espace ouvert :

$$\Delta(x) = \{d \in \mathcal{U} / \langle \nabla F(x), d \rangle < 0\}$$

On en déduit la **caractérisation** de la solution de (\mathcal{Q}) (cf. (3.10)) :

$$x \text{ est solution de } (\mathcal{Q}) \quad - \quad \nabla F(x) = 0$$

Si x n'est pas solution de (\mathcal{Q}) , on constate que $-\nabla F(x) \in \Delta(x)$: c'est la direction de descente dite "de plus grande pente". Notons que cette propriété, locale, est *indépendante de la convexité de F* . En effet, on peut toujours utiliser (3.11) pour écrire :

$$\forall t > 0 \quad F(x - t\nabla F(x)) = F(x) - \|\nabla F(x)\|^2 t + o(t)$$

et il existe donc $\alpha > 0$ tel que $F(x - t\nabla F(x)) < F(x)$ sur l'intervalle $]0, \alpha[$.

Le rôle du gradient est donc fondamental : dans le cas différentiable, la quasi-totalité des algorithmes se servent, directement ou indirectement, de cette direction de descente "naturelle". On citera, entre autres, les méthodes de gradient à pas fixe, à pas optimal, et de gradient conjugué, ainsi que l'algorithme de Newton et les méthodes analogues. Nous ne les détaillerons pas ici.

3.5.1.2 Cas non différentiable

Dans le cas où F n'est pas différentiable sur \mathcal{U} , on ne peut s'assurer de l'existence du gradient en un point, et on ne dispose donc plus de direction de descente évidente. Afin de généraliser le gradient, et particulièrement pour des fonctions convexes, on introduit la notion de sous-différentiabilité.

Soit $x \in \mathcal{U}$. On dit que $g \in \mathcal{U}$ est un **sous-gradient** de F en x si :

$$\forall y \in \mathcal{U} \quad F(y) - F(x) \geq \langle g, y - x \rangle$$

ce qui signifie que la fonction F est minorée par la fonction affine de pente g prenant en x la valeur $F(x)$. La notion de sous-gradient est donc *globale*, contrairement à celle de gradient, qui est *locale*.

Le **sous-différentiel** de F en $x \in \mathcal{U}$ est l'ensemble des sous-gradients en ce point :

$$\partial F(x) = \{ g \in \mathcal{U} / \forall y \in \mathcal{U} \quad F(y) - F(x) \geq \langle g, y - x \rangle \}$$

On dira que F est **sous-différentiable** en $x \in \mathcal{U}$ si $\partial F(x) \neq \emptyset$.

On utilise la convexité et la continuité de F sur \mathcal{U} pour montrer les trois propriétés suivantes :

1. F est sous-différentiable sur \mathcal{U} . En tout point $x \in \mathcal{U}$, $\partial F(x)$ est alors un ensemble *non vide, convexe* et *compact*.
2. la dérivée directionnelle s'exprime en fonction du sous-différentiel par :

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad \forall d \in \mathcal{U} \quad F'(x; d) = \max_{g \in \partial F(x)} \langle g, d \rangle \quad (3.12)$$

et ce maximum est atteint.

3. si F est différentiable en $x \in \mathcal{U}$, alors :

$$\partial F(x) = \{ \nabla F(x) \} \quad (3.13)$$

Prenons l'exemple d'une fonction à variable réelle ($\mathcal{U} = \mathbb{R}$). On définit la fonction F comme suit (cf. Fig. 3.14) :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La notion de différentiabilité correspond ici à la dérivabilité. En $x = 0$, F admet une dérivée à gauche, 0, et une dérivée à droite, 1. Ces valeurs n'étant pas égales, F n'est donc pas dérivable en ce point. Cependant, on montre aisément que les droites passant par

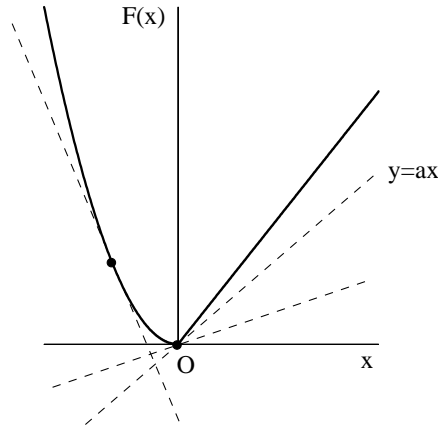


Figure 3.14: Sous-gradients et sous-différentiel : on constate l'importance de la convexité de F pour l'existence de fonctions affines minorantes *et* interpolantes

l'origine et qui minorent F ont pour équation $y = ax$, avec $a \in [0, 1]$. Ceci signifie exactement que $\partial F(0) = [0, 1]$, qui est l'enveloppe convexe des dérivées à gauche et à droite : ce résultat est très général. Pour $x \neq 0$, F est dérivable en x , et on a donc $\partial F(x) = \{F'(x)\}$. Dans ce cas, la tangente en x est la seule droite passant par $(x, F(x))$ qui minore F .

La **caractérisation** de la solution de (Q) provient directement de la définition du sous-différentiel :

$$x \text{ est solution de (Q)} \quad - \quad 0 \in \partial F(x) \quad (3.14)$$

En effet, $0 \in \partial F(x)$ s'écrit simplement :

$$\forall y \in \mathcal{U} \quad F(y) - F(x) \geq \langle 0, y - x \rangle = 0$$

Soit $x \in \mathcal{U}$. Alors $d \in \mathcal{U}$ est une **direction de descente** de F en x *si et seulement si* (cf. (3.9) et (3.12)) :

$$F'(x; d) < 0 \quad - \quad \max_{g \in \partial F(x)} \langle g, d \rangle < 0 \quad - \quad \forall g \in \partial F(x) \quad \langle g, d \rangle < 0$$

Soit :

$$\Delta(x) = \{d \in \mathcal{U} / \forall g \in \partial F(x) \quad \langle g, d \rangle < 0\} \quad (3.15)$$

Il n'apparaît donc pas, *a priori*, de direction de descente évidente, comme c'était le cas pour une fonction différentiable. En particulier, si $g \in \partial F(x)$, $-g$ n'est pas toujours une direction de descente. Cependant, on montre que le schéma itératif basé sur de telles directions converge vers la solution \bar{x} du problème (Q), à condition toutefois d'utiliser un pas adéquat : ces algorithmes sont dits de *sous-gradient*. Nous en donnons ici un exemple.

Algorithme de sous-gradient normalisé

Soit (α_n) une suite de termes positifs à *série divergente*, c'est à dire :

$$\alpha_n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$$

On considère l'algorithme itératif suivant, initialisé en $x_0 \in \mathcal{U}$:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{g_n}{\|g_n\|} \quad g_n \in \partial F(x_n)$$

On montre alors que :

- soit il existe n_0 tel que $x_{n_0} = \bar{x}$
- soit $x_n \longrightarrow \bar{x}$

Cet algorithme nécessite donc l'accès, en tout point $x \in \mathcal{U}$, à un élément de $\partial F(x)$, le caractère *global* de la notion de sous-gradient permettant ensuite de converger vers la solution \bar{x} . Cependant, il est naturel de chercher à y associer un caractère *local* en déterminant en x un élément $g \in \partial F(x)$ tel que $-g$ soit une direction de descente ($-g \in \Delta(x)$).

Considérons $x \in \mathcal{U}$ qui ne soit pas solution de (\mathcal{Q}) , ce qui équivaut donc à : $0 \notin \partial F(x)$. On appelle $g(x)$ la projection de 0 sur $\partial F(x)$, sous-ensemble non vide, convexe et fermé d'un espace de dimension finie. $g(x)$ est donc solution du problème :

$$\min_{g \in \partial F(x)} \|g\|^2 \tag{3.16}$$

La caractérisation de $g(x)$, déjà citée au Lemme 1, est donnée par :

$$\forall g \in \partial F(x) \quad \langle 0 - g(x), g - g(x) \rangle \leq 0$$

On obtient, en notant que $g(x) \neq 0$:

$$\forall g \in \partial F(x) \quad \langle -g(x), g \rangle \leq -\|g(x)\|^2 < 0 \tag{3.17}$$

et nous avons donc bien : $-g(x) \in \Delta(x)$.

De plus, on montre que $-g(x)$ est la direction de plus grande pente, c'est à dire que $-g(x)/\|g(x)\|$ est l'unique solution du problème :

$$\min_{\|d\|=1} F'(x; d) \tag{3.18}$$

En effet, notons $d(x) = -g(x)/\|g(x)\|$. Alors (3.17) équivaut à :

$$\max_{g \in \partial F(x)} \langle g, d(x) \rangle \leq -\|g(x)\| \quad - \quad F'(x; d(x)) \leq -\|g(x)\|$$

On montre maintenant que pour toute direction $d \in \mathcal{U}$ unitaire, $F'(x; d) \geq -\|g(x)\|$: supposons qu'il existe une direction $d_0 \in \mathcal{U}$ telle que $\|d_0\| = 1$ et $F'(x; d_0) < -\|g(x)\|$. Ceci se traduit par :

$$\forall g \in \partial F(x) \quad \langle g, d_0 \rangle < -\|g(x)\|$$

Pour $g = g(x)$, on obtient donc :

$$\langle g(x), d_0 \rangle < -\|g(x)\| \quad - \quad \langle -g(x), d_0 \rangle > \| -g(x) \| \cdot \|d_0\|$$

ce qui contredit l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $d(x)$ est donc bien solution du problème (3.18).

Montrons l'unicité de la solution : supposons qu'il existe deux directions d_1 et d_2 unitaires distinctes qui soient solution de (3.18) : $F'(x; d_1) = F'(x; d_2) = m$ ($m \leq -\|g(x)\| < 0$). Posons $d = \frac{d_1 + d_2}{2}$. On peut alors écrire :

$$\|d\|^2 = \left\| \frac{d_1 + d_2}{2} \right\|^2 = 1 - \left\| \frac{d_1 - d_2}{2} \right\|^2 < 1$$

D'autre part, la fonction $d \mapsto F'(x; d)$ est *convexe* et *positivement homogène*. On a donc :

$$F'(x; \frac{d}{\|d\|}) = \frac{1}{\|d\|} F'(x; \frac{d_1 + d_2}{2}) \leq \frac{1}{\|d\|} (\frac{1}{2} F'(x; d_1) + \frac{1}{2} F'(x; d_2)) = \frac{m}{\|d\|} < m$$

Ceci est une contradiction, et $d(x)$ est donc l'unique solution de (3.18).

On peut donc énoncer une version améliorée de l'algorithme de sous-gradient normalisé. Comme précédemment, (α_n) est une suite de termes positifs à série divergente :

$$n = 0;$$

$$x_0 \in \mathcal{U};$$

$$1. \quad g_n = \arg \min_{g \in \partial F(x_n)} \|g\|^2;$$

$$\underline{\text{si}} \quad g_n = 0 :$$

$$- \quad \bar{x} = x_n;$$

$$- \quad \underline{\text{stop}};$$

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{g_n}{\|g_n\|};$$

Incrémenter n ;

Aller en 1;

On notera toutefois que cet algorithme nécessite en tout point la connaissance du sous-différentiel, alors qu'une sous-gradient seulement était nécessaire pour la première version. En pratique, ceci ne sera possible que pour certaines fonctions, et notamment lorsque F est la borne supérieure d'une famille finie de fonctions convexes différentiables : c'est le cas que nous abordons ci-après.

3.5.2 Borne supérieure de fonctions convexes différentiables

3.5.2.1 Cas général

On suppose ici la fonction F définie par :

$$F(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$$

où $I = \{1, 2, \dots, m\}$ et les f_i des fonctions convexes différentiables sur \mathcal{U} .

La fonction F est convexe, continue sur \mathcal{U} , mais pas nécessairement différentiable (la fonction *valeur absolue*, définie sur \mathbb{R} par $|x| = \max(x, -x)$, n'est pas dérivable en 0). Il est donc nécessaire de se placer dans le cadre du paragraphe 3.5.1.2.

Le cas d'une fonction F définie comme borne supérieure est en fait intéressant car il conduit à une expression simple du sous-différentiel. On peut montrer, en effet, que lorsque les fonctions f_i sont *convexes* et *continues* :

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad \partial F(x) = \text{Conv} \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right)$$

où Conv est l'enveloppe convexe et $I(x) = \{i \in I / f_i(x) = F(x)\}$.

Or, notre hypothèse est plus forte puisque nous avons supposé les f_i différentiables. Nous avons donc $\partial f_i(x) = \{\nabla f_i(x)\}$ (cf. (3.13)) et, finalement :

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad \partial F(x) = \text{Conv}(\{\nabla f_i(x) / i \in I(x)\}) \quad (3.19)$$

Dès lors, la **caractérisation** de la solution de (\mathcal{Q}) (cf. (3.14)) peut s'énoncer de la manière suivante : x est solution de (\mathcal{Q}) *si et seulement si* il existe une famille $\{\lambda_i\}_{i \in I(x)}$ de réels positifs et non tous nuls telle que :

$$\sum_{i \in I(x)} \lambda_i \nabla f_i(x) = 0$$

D'autre part, on montre facilement que l'ensemble des **directions de descente** (cf. (3.15)) devient :

$$\Delta(x) = \{d \in \mathcal{U} / \forall i \in I(x) \quad \langle \nabla f_i(x), d \rangle < 0\} = \bigcap_{i \in I(x)} \{d \in \mathcal{U} / \langle \nabla f_i(x), d \rangle < 0\} \quad (3.20)$$

$\Delta(x)$ est donc l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces ouverts.

Avec un sous-différentiel défini comme enveloppe convexe d'un polytope, il semble maintenant aisé de déterminer la meilleure direction de descente, $-g(x)$, où $g(x)$ est l'élément de $\partial F(x)$ de norme minimale, ou projection de 0 sur $\partial F(x)$ (cf. (3.16)) : on

pressent déjà le parallèle avec toutes les notions utilisées au 3.4 pour traiter le problème de la plus petite boule englobante.

Nous avons représenté, sur la Figure 3.15, un exemple qui illustre toutes ces propriétés.

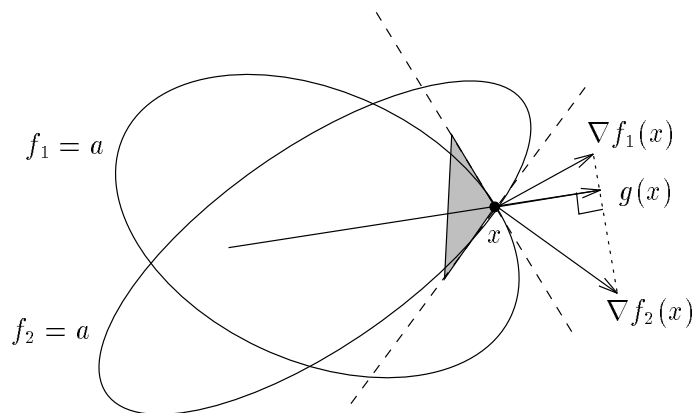


Figure 3.15: Pour $F(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$: les deux courbes représentent les lignes de niveau de f_1 et f_2 à la valeur a . Le point x , qui est à l'intersection de ces courbes, est tel que $I(x) = \{1, 2\}$: donc $\partial F(x) = \text{Conv}(\nabla f_1(x), \nabla f_2(x))$. On a représenté le cône des directions de descente, et $g(x)$, de norme minimale sur $\partial F(x)$: $-g(x)$ est la direction de plus grande pente.

3.5.2.2 Retour au problème de la plus petite boule englobante

Nous conserverons ici la notation vectorielle adoptée dans cette partie. Considérons une famille finie $\{a_i\}_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{U} . Au paragraphe 3.4, nous avons traduit le problème de la plus petite boule englobante par la minimisation de la fonctionnelle Φ , adaptée à la géométrie car homogène à une distance :

$$\Phi(x) = \max_{i \in I} \|x - a_i\|$$

Cependant, la fonction $x \mapsto \|x - a_i\|$ n'est pas différentiable en a_i . Afin de pouvoir appliquer les résultats précédents, nous avons donc posé $f_i(x) = \frac{1}{2}\|x - a_i\|^2$: f_i est alors différentiable sur \mathcal{U} et convexe (le coefficient $\frac{1}{2}$ a été introduit pour des raisons de commodité). La fonction F est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \max_{i \in I} \|x - a_i\|^2 \quad (3.21)$$

et (Q) coïncide bien avec le problème de plus petite boule. Par ailleurs, $I(x)$ contient les indices des "points de contact".

L'existence et l'unicité de la solution au problème (Q) sont ici garanties par la forte convexité de F . En effet, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}^2$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on vérifie sans



Figure 3.16: Représentation de la restriction de F à un carré de R^2 pour les points de la Figure 3.1. On observe la non-différentiabilité de F .

problème l'égalité :

$$f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(y) - \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

On en déduit donc :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) - \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

Ceci prouve que F est une fonction 1-convexe (cf. (3.7)).

Explicitons maintenant les différentes caractéristiques du problème. Nous avons, en premier lieu :

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad \nabla f_i(x) = x - a_i$$

Le **sous-différentiel** de F en $x \in U$ s'écrit donc (cf. (3.19)) :

$$\partial F(x) = \text{Conv}(\{x - a_i/i \in I(x)\}) = x - \text{Conv}(\{a_i/i \in I(x)\})$$

On en déduit ainsi la **caractérisation** de la solution (cf. (3.14)) :

$$0 \in \partial F(x) \quad - \quad x \in \text{Conv}(\{a_i/i \in I(x)\})$$

Nous retrouvons donc le théorème de caractérisation (Théorème 1) que nous avons énoncé en 3.4.2.1.

L'ensemble des **directions de descente** s'écrira (cf. (3.20)) :

$$\Delta(x) = \bigcap_{i \in I(x)} \{d \in \mathcal{U} / \langle x - a_i, d \rangle < 0\}$$

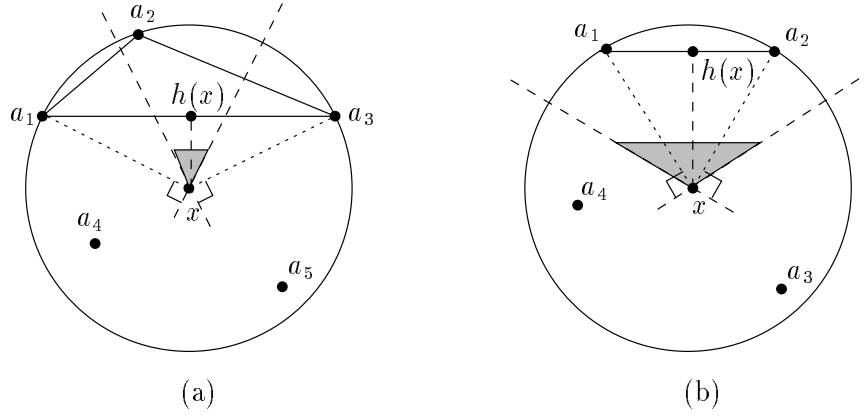


Figure 3.17: Sous-différentiel et cône des directions de descente : dans le cas (a), $-\partial F(x) \not\subset \Delta(x)$; dans le cas (b), $-\partial F(x) \subset \Delta(x)$

Nous avons, sur la Figure 3.17, donné un exemple montrant que, si g est un sous-gradient de F en x , $-g$ n'est pas nécessairement une direction de descente.

Notons $\bar{I}(x) = \text{Conv}(\{a_i/i \in I(x)\})$. Nous savons que la meilleure direction de descente s'écrit $-g(x)$, où $g(x)$ est solution du problème :

$$\min_{g \in x - \bar{I}(x)} \|g\|^2$$

En effectuant le changement de variable $g = x - r$, on obtient donc que $g(x) = x - h(x)$, où $h(x)$ est solution du problème :

$$\min_{r \in \bar{I}(x)} \|x - r\|^2$$

En d'autres termes, $h(x)$ est la projection de x sur $\text{Conv}(\{a_i/i \in I(x)\})$, et $h(x) - x$, direction de plus grande pente, n'est autre que la direction \mathbf{OH} utilisée en 3.4 pour notre algorithme!

3.5.2.3 Conclusion

L'algorithme que nous avons développé en 3.4 fait donc partie des algorithmes de sous-gradient, qui se différencie principalement par le choix d'un élément $g_n \in \partial F(x_n)$ et d'un pas $\alpha_n > 0$. Essayons de distinguer les avantages et les inconvénients des différentes possibilités.

Pour ce qui est du sous-gradient, nous avons vu que tout élément de $\partial F(x_n)$ convient. $g(x_n)$, s'il fournit la direction de descente de plus grande pente, sera coûteux en temps

de calcul. Cependant, le test $\|g(x_n)\| < \varepsilon$ est excellent puisqu'il provient directement de la caractérisation de la solution. Une autre possibilité, au contraire très peu coûteuse, pourrait également être :

$$g_n = \frac{1}{\text{Card}(I(x_n))} \sum_{i \in I(x_n)} \nabla f_i(x)$$

En ce qui concerne le pas, on peut toujours choisir (α_n) à série divergente, soit, typiquement : $\alpha_n = \mu/(n+1)$. Le choix de μ est important car il détermine la vitesse de la convergence de l'algorithme. Lorsque $-g_n$ est une direction de descente, en particulier pour $g_n = g(x_n)$, on peut chercher à optimiser le pas, ce qui consiste à évaluer :

$$\alpha_n = \arg \min_{t > 0} F(x_n - t \frac{g_n}{\|g_n\|})$$

Il est évident qu'en pratique, une évaluation exacte de α_n serait trop longue : on se contente donc souvent d'une valeur acceptable. Cependant, dans le cas de la plus petite boule englobante, nous avons pu déterminer α_n explicitement, et avons montré que la convergence se fait alors en un nombre fini d'itérations. Il va sans dire que l'efficacité de l'algorithme s'en trouve améliorée.

3.5.3 Mise en œuvre de l'algorithme de sous-gradient normalisé

3.5.3.1 Exemple d'une fonction à variable réelle

D'une manière générale, le cas d'une fonction à variable réelle n'est pas très complexe puisqu'il n'existe que deux directions unitaires. Ainsi, si x n'est pas minimum de F , $0 \notin \partial F(x)$. $\partial F(x)$, qui est un intervalle fermé de R , est donc inclus soit dans R_+ , soit dans R_- , et on choisira respectivement -1 ou 1 comme direction de descente. Ce cas simple est cependant intéressant, car il va nous permettre de juger l'importance de la suite (α_n) pour la qualité de la convergence.

Nous avons choisi pour cet exemple $F(x) = \max(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, avec :

$$f_1(x) = x^4 \quad f_2(x) = -x + 4 \quad f_3(x) = x^2 + 2x + 3$$

Ces fonctions sont convexes et dérivables, comme le nécessitent les hypothèses de 3.5.2, et on calcule facilement le minimum \bar{x} , qui est à l'intersection de la droite et de la parabole (cf. Fig. 3.18) : $\bar{x} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \simeq 0,303$.

Nous avons appliqué l'algorithme de sous-gradient normalisé à la fonction F , avec le pas à série divergente $\alpha_n = \mu/(n+1)$. L'initialisation étant fixée à $x = 3$, nous avons représenté, pour différentes valeurs de μ , les 200 premiers itérés de l'algorithme. Comme

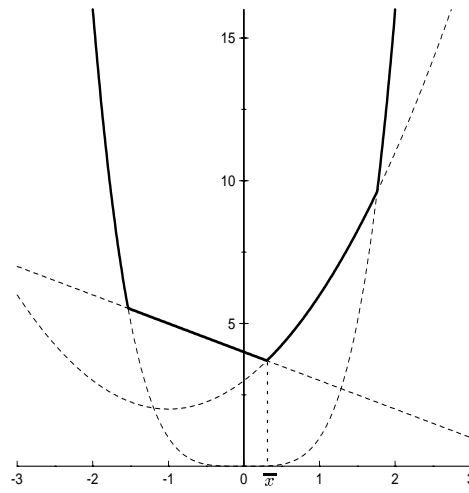


Figure 3.18: Représentation de F : on a $I(\bar{x}) = \{2, 3\}$, et $\partial F(\bar{x}) = [f'_2(\bar{x}), f'_3(\bar{x})]$. On remarque que $0 \in \partial F(\bar{x})$, ce qui caractérise le fait que \bar{x} est minimum de F .

on peut le constater sur la Figure 3.19, la qualité de la convergence varie beaucoup suivant les valeurs de μ . En effet, la convergence est visiblement très lente pour $\mu = 0, 1$ et $\mu = 0, 3$, satisfaisante pour $\mu = 0, 5$ et $\mu = 0, 7$. Pour $\mu = 5$, on constate de fortes oscillations autour de \bar{x} , qui s'amortissent. En définitive, le choix de μ est donc fondamental pour obtenir une bonne convergence de l'algorithme.

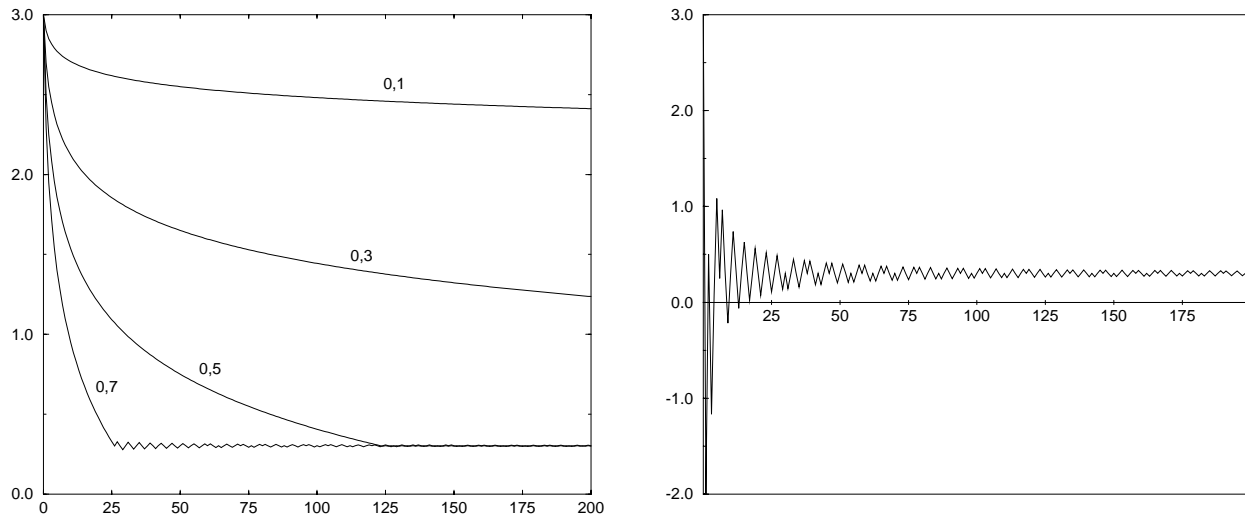


Figure 3.19: Algorithme de sous-gradient appliqué à $F(x) = \max(x^4, -x + 4, x^2 + 2x + 3)$, avec le pas à série divergente $\alpha_n = \mu/(n + 1)$, initialisé en $x_0 = 3$. Représentation de x_n : sur la figure de gauche, $\mu = 0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7$; sur la figure de droite, $\mu = 5$.

3.5.3.2 Application au problème de la plus petite boule englobante

Nous supposons ici F définie par (3.21). Nous avons d'abord repris, en dimension 2, l'exemple de la Figure 3.7, qui comportait 6 points. En appliquant l'algorithme de sous-gradient normalisé avec la direction de plus grande pente et le pas $\alpha_n = 1,5/(n+1)$, on constate sur la Figure 3.20 que, pour deux points d'initialisation différents, les chemins parcourus sont similaires à ceux de la Figure 3.7, avec, cependant, de nombreuses oscillations.

Considérons ensuite, comme nous l'avons fait en page 82, un ensemble de 5000 points en dimension 10, uniformément répartis dans la boule unité. En choisissant le même point d'initialisation, la même précision $\varepsilon = 10^{-5}$ et le même test d'arrêt (soit $\|g(x_n)\| < \varepsilon$), la convergence se fait en 12645 itérations, alors que notre algorithme nécessitait 29 itérations seulement. On en conclut donc l'importance de la phase d'optimisation du pas, qui est en fait la seule différence entre les deux méthodes.

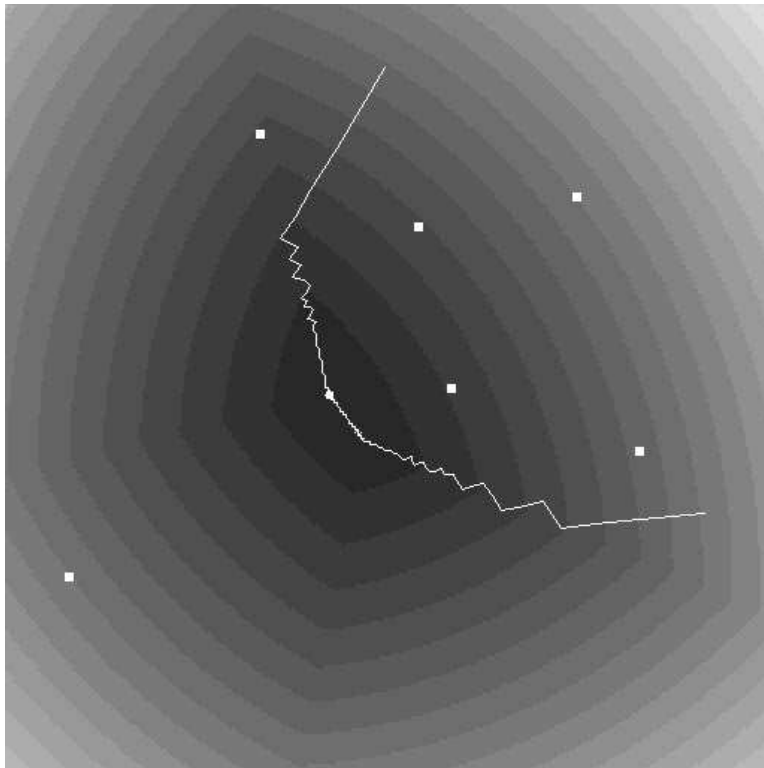


Figure 3.20: Déroulement de l'algorithme de sous-gradient normalisé pour deux initialisations différentes.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé, pour le problème de la plus petite boule englobante, un algorithme qui présente le double avantage de fonctionner en dimension quelconque et de converger en un nombre fini d'itérations. Cet algorithme, au vu des

résultats numériques, semble d'une réelle efficacité, et présente un bon comportement en fonction du nombre de points et de la dimension. Nous avons montré qu'il représente, d'une part, une généralisation de l'algorithme de Chrystal-Peirce au cas multidimensionnel, mais également un simple algorithme de plus grande pente où le pas optimal a pu être explicité. On retiendra ainsi que notre algorithme se situe réellement à la frontière entre la géométrie euclidienne et les méthodes classiques d'optimisation.

Chapitre 4

L'optimisation dosimétrique

4.1 Introduction

Définissons de manière aussi absolue que possible ce que peut être le problème de dosimétrie inverse. Si l'on considère un corps exposé à divers rayonnements, ceux-ci étant décrits par un paramètre μ , alors le problème de dosimétrie directe consiste à déterminer la répartition de dose D reçue par ce corps. D est une fonction tridimensionnelle, et l'on peut écrire :

$$D = T\mu$$

On a noté T l'“opérateur de dose” représentant le phénomène physique d'interaction des rayonnements avec la matière. Le problème inverse peut donc se poser ainsi : pour une répartition de dose D donnée, quel est le paramètre μ tel que le corps irradié reçoive cette dose? En d'autres termes, il s'agit de déterminer l'inverse T^{-1} de l'opérateur T :

$$\mu = T^{-1}D$$

Rappelons l'absence totale, à ce jour, de représentation analytique exacte pour l'opérateur T . D'autre part, l'ensemble des paramètres décrivant l'irradiation et représentés par μ est extrêmement large. Citons principalement : l'énergie des rayons X utilisés, la géométrie des faisceaux, leurs positions respectives par rapport au corps irradié, leurs temps d'exposition. Il n'est pas envisageable de traiter le problème inverse en tenant compte de la totalité de ces paramètres : on s'applique, habituellement, à travailler dans un protocole donné, qui en fixe une partie. Dans la plupart des cas, on conserve comme variables les pondérations (ou temps d'exposition) des faisceaux. L'irradiation d'une zone cible, enfin, doit se faire en épargnant au mieux les tissus environnants. La répartition de dose idéale D pourrait donc être définie comme une fonction indicatrice de la zone cible : dans ce cas, celle-ci reçoit une dose constante, alors que les tissus sains reçoivent une dose

nulle.

Nous avons défini le problème de dosimétrie inverse sous sa forme la plus stricte. Comme nous allons le constater dans l'étude bibliographique, la dénomination de "dosimétrie inverse" s'étend rapidement à l'optimisation des traitements radiothérapeutiques en général.

4.2 Données bibliographiques

On distingue, dans la littérature, deux approches du problème de dosimétrie inverse. Certains auteurs, d'une part, restent dans un cadre assez théorique, et travaillent à partir de modélisations continues de l'opérateur T . D'autres, plus immédiatement intéressés par une mise en œuvre médicale, en effectuent une modélisation discrète. Dans ce paragraphe, nous présentons des exemples représentatifs de ces deux approches.

4.2.1 Des approches continues

La modélisation continue est, typiquement, utilisée pour les cas d'irradiations dynamiques : on suppose la source mobile par rapport au patient. Remarquons, a priori, que la technologie actuelle du matériel d'irradiation ne permet que de très simples mouvements de cette source.

4.2.1.1 Une solution analytique

Brahme ([BRL82]) est l'un des rares à proposer une solution complètement analytique. Ceci se fait, bien sûr, au prix d'une grande simplification du problème : il suppose travailler en 2D, et considère un objet de forme circulaire de rayon R , soumis à une rotation d'angle 2π à vitesse angulaire ω face à un faisceau parallèle et immobile (cf. Fig. 4.1). La représentation analytique de la dose correspondant à ce faisceau est simplifiée à l'extrême :

$$d(x, z) = d(x)e^{-\mu z}$$

où $d(x)$ est le profil de dose (on suppose $d(x) = 0$ pour $x \leq 0$) et μ le coefficient d'atténuation.

L'expression de la dose reçue, après rotation, au point de coordonnées polaires (r, θ) s'écrit :

$$D(r) = \oint_r d(x)e^{-\mu z} d\theta/\pi$$

Soit, après changement de variable :

$$D(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{d(x) \cosh[\mu\sqrt{r^2 - x^2}]}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \quad (4.1)$$

où on a noté \cosh le cosinus hyperbolique.

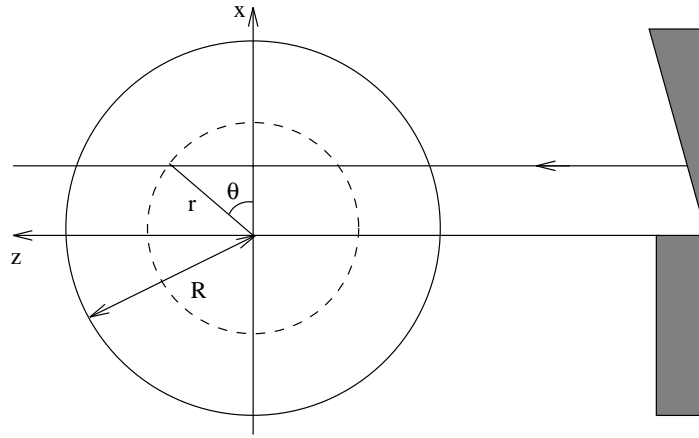


Figure 4.1: Objet circulaire en rotation devant un faisceau fixe

L'égalité précédente représente donc l'expression analytique du problème direct : connaissant la fonction d , on en déduit la répartition de la dose. Le problème inverse consiste donc, pour une répartition de dose D donnée, à déterminer la fonction d correspondante. Cette équation, couramment connue sous le nom d'“équation de Fredholm de première espèce”, peut rarement être résolue analytiquement. Cependant, dans le cas présent, un changement de variables ($x^2 = t$, $r^2 = y$) permet de mettre (4.1) sous forme d'une équation de convolution et de l'inverser en utilisant la transformée de Laplace. On obtient finalement :

$$d(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\cos[\mu\sqrt{x^2 - r^2}]}{\sqrt{x^2 - r^2}} D(r) r dr \quad (4.2)$$

Si l'on considère la distribution de dose idéale, fonction indicatrice d'un disque de rayon r_0 et centré en O :

$$D(r) = \begin{cases} D & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

(4.2) permet d'exprimer analytiquement $d(x)$, que nous n'explicitons pas ici.

Barth ([Bar90],[KB90]) reprend le modèle précédent et en généralise les résultats. Il montre que pour tout objet de forme convexe, moyennant une correction au niveau de l'intensité, on peut, par rotation de l'objet autour d'un point, obtenir une distribution de dose égale à l'indicatrice d'un disque centré en ce point. En multipliant les rotations, on peut donc obtenir une dose constante sur une réunion de disques, et nulle ailleurs. On en conclut donc que pour un objet convexe, il est possible d'approcher la répartition de dose par l'indicatrice d'un ensemble Ω en “recouvrant” cet ensemble par des disques (cf. Fig. 4.2).

Comme le souligne Webb ([Web93]), cette méthode analytique est élégante, mais s'éloigne dangereusement du problème réel. Outre les suppositions faites sur la décroissance exponentielle de dose (ce qui équivaut en fait à négliger la dose diffusée), on constate

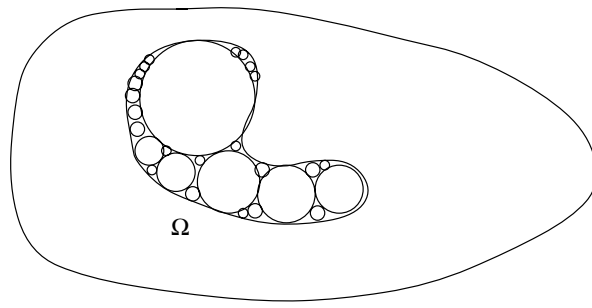


Figure 4.2: “Recouvrement” d’un ensemble Ω par des disques

en fait que la fonction $d(x)$ obtenue prend, pour certaines valeurs de x , des valeurs négatives, ce qui est physiquement irréalisable. Face à ce problème, [Bar90] propose simplement de remplacer ces valeurs négatives par 0 : on s’éloigne alors de la dose idéale.

4.2.1.2 Utilisation des kernels de dose

Le second exemple d’approche continue que l’on puisse citer est basé sur le calcul de la dose par la méthode des kernels (cf. 2.2.1.2). Si l’on considère un volume homogène V , rappelons que la dose reçue en \mathbf{r} s’exprime sous la forme :

$$D(\mathbf{r}) = \int_V f(\mathbf{r}')h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3r' \quad (4.3)$$

où f est la fluence en photons primaires et h le kernel élémentaire de dose.

(4.3) est, comme précédemment, une équation de Fredholm de première espèce ; c’est également une équation de convolution. D et h étant supposés connus, il s’agit donc de déterminer la fonction f .

Brahme ([Bra88]) utilise l’analyse de Fourier et obtient :

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(D)}{\mathcal{F}(h)}\right)$$

où on a noté \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse. L’auteur utilise, par ailleurs, un filtre passe-bas afin de réduire les nombreuses oscillations de $\mathcal{F}(f)$. Précisons qu’une contrainte d’inégalité sur la solution ne peut être transcrite dans le domaine de Fourier. Il en résulte, comme pour le premier exemple que nous avons donné, que la solution obtenue n’est pas nécessairement positive, et, dans ce cas, pas physiquement réalisable : on rectifie alors à 0 les valeurs négatives, ce qui n’est pas vraiment satisfaisant.

Lind et **Källman** ([LK90]), qui sont attentifs aux contraintes physiques, proposent le schéma itératif suivant :

- $f_0 = aD$

- $f_{k+1} = C(f_k + a(D - f_k \otimes h))$

où C est l'opérateur de contrainte positive, a un scalaire permettant de contrôler la convergence, et \otimes l'opération de convolution.

Ce schéma, qui s'exprime simplement sous forme matricielle, présente une propriété médicalement importante, montrée par Lind ([Lin90]) : il n'y a pas de sous-dosage, ce qui signifie que la dose obtenue $f \otimes h$ est supérieure en tout point à la dose désirée D . Cette propriété, qu'on ne pourrait espérer montrer par la méthode de Fourier, montre, outre la simplicité d'implémentation, que cette méthode est plus souple que la précédente.

Précisons qu'en pratique, après avoir déterminé la solution f , [Bra88] et [LK90] déterminent les profils de dose correspondants par "rétro-projection inverse". Il est ensuite possible de déterminer la forme des caches pouvant produire de tels profils, et d'effectuer irradiations et mesures expérimentales afin de vérifier la validité des calculs.

4.2.2 Des approches discrètes

La modélisation "discrète" du problème de dosimétrie inverse se prête particulièrement aux protocoles les plus courants, où un corps est exposé à un nombre fini q de faisceaux, dont on contrôle les temps d'exposition μ_j . Si l'on fixe n points du corps, alors la formulation matricielle du problème direct est :

$$D = A\mu$$

où D est le vecteur de dimension n contenant les doses aux points considérés, A la matrice $n \times q$, discrétisation de l'"opérateur de dose", et μ le vecteur de dimension q contenant les pondérations.

Il est, bien entendu, inespéré de pouvoir inverser ce système au sens strict. Le but est d'y apporter une solution *optimale* en tenant compte simultanément d'arguments mathématiques, physiques, et médicaux.

4.2.2.1 Utilisation de la décomposition en valeurs singulières

Lefkopoulos ([LDR88]) choisit comme critère d'optimisation la précision de reconstruction $\Delta = \|A\mu - D\|$. L'utilisation de l'inverse généralisée ($A^\circ = (A^t A)^{-1} A^t$) semble ici assez inappropriée compte tenu du mauvais conditionnement que présente habituellement la matrice A . L'auteur propose d'utiliser la décomposition en valeurs singulières : si (u_i, v_i, σ_i) ($1 \leq i \leq q$, on suppose A de rang q) est un système singulier de la matrice A , et $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_q > 0$, cette décomposition s'écrit :

$$A = \sum_{i=1}^q \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^t$$

Alors la solution prenant en compte les p premières composantes singulières est donnée par :

$$\mu^p = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sigma_i} (u_i^t \cdot D) \cdot v_i$$

Le cas où toutes les composantes singulières sont utilisées (soit $p = q$) correspond au cas de l'inverse généralisée, et, d'autre part, on force à 0 les valeurs négatives de μ afin d'obtenir une solution réalisable.

Lefkopoulos a testé cette méthode pour des faisceaux coplanaires équirépartis, avec quatre pas angulaires $\Delta\theta$ différents. Il constate que le problème est encore bien conditionné pour $\Delta\theta = 40^\circ$: la solution optimale est alors donnée par l'inverse généralisée ; par contre, le conditionnement de A (soit σ_1/σ_q) augmente fortement lorsque $\Delta\theta$ diminue, et on détermine alors p tel que la solution μ_p minimise le critère d'optimisation Δ .

4.2.2.2 Utilisation de l'algorithme de Cimmino

La méthode utilisée par Lefkopoulos est basée sur des arguments mathématiques et physiques, mais pas médicaux : la dose obtenue peut, par endroits, s'éloigner suffisamment de la dose désirée, et se révéler trop faible ou trop élevée. **Censor** ([CAP88]) choisit une formulation réaliste du problème, consistant à fixer en chaque point une dose minimale et une dose maximale (en pratique déterminées par le médecin). Le problème se résume donc à déterminer l'existence du vecteur de pondération μ tel que :

$$\begin{aligned} \underline{D}_i &\leq \sum_{j=1}^q \mu_j A_{ij} \leq \overline{D}_i & i = 1 \dots n \\ \mu_j &\geq 0 & j = 1 \dots q \end{aligned}$$

La méthode choisie par Censor pour résoudre ce problème est l'algorithme itératif de Cimmino. Si l'on écrit les inégalités linéaires précédentes sous la forme :

$$\langle a^i, \mu \rangle \leq b^i \quad 1 \leq i \leq n$$

on considère les hyperplans de R^q :

$$H_i = \{\mu \in R^q / \langle a^i, \mu \rangle = b^i\} \quad 1 \leq i \leq n$$

et on attribue à chaque inégalité une pondération w_i reflétant son importance. L'algorithme de Cimmino (1938) consiste, si μ^k est le k ième itéré, à projeter μ_k sur chacun des H_i , et à définir μ^{k+1} comme étant le barycentre de ces projections munies des pondérations w_i . Censor utilise en fait une amélioration de cet algorithme, adaptée aux grands systèmes creux.

4.3 Formalisation mathématique

Comme nous avons pu le constater, il existe une grande variété d'approches de l'optimisation dosimétrique, qui va de la formalisation la plus stricte du problème de dosimétrie

inverse à des approches nettement plus tournées vers le côté médical. Notre travail étant - en partie - effectué dans le cadre d'un projet de Radiothérapie Conformative de la prostate, il était important de ne pas perdre de vue une éventuelle mise en œuvre clinique et, donc, de tenir compte des protocoles actuellement en place et des possibilités matérielles disponibles au C.H.U. de Grenoble.

4.3.1 Choix du protocole

Nous avons décidé de nous placer dans le contexte d'un protocole "multi-faisceaux" (ou "feux croisés"), qui est de loin le plus fréquent en radiothérapie externe. Dans ce cas, le patient est irradié par q faisceaux distincts de même énergie. Chacun de ces faisceaux est défini, dans un référentiel $Oxyz$ lié au patient, par :

- la position de sa source;
- son axe orienté;
- sa section, définie dans un plan orthogonal à l'axe.

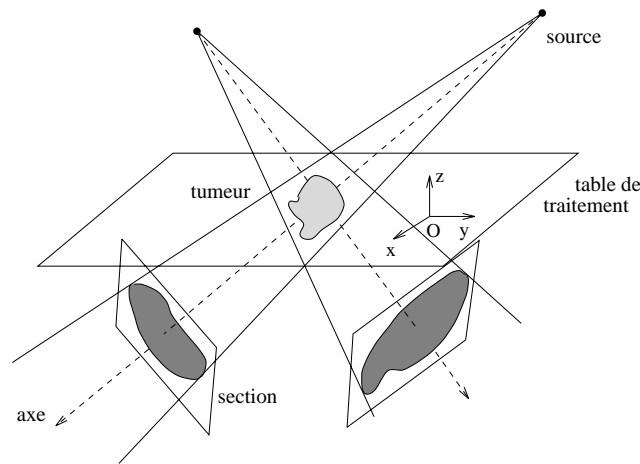


Figure 4.3: Définition d'une balistique d'irradiation

Le faisceau F_j crée au point $M(x, y, z)$ un *débit de dose* $d_j(x, y, z)$, exprimé en Gy/s, constant pendant la séance de traitement, et pouvant être calculé grâce aux méthodes indiquées au Chapitre 2. Lorsque le temps d'exposition (ou la pondération) de ce faisceau est μ_j , la dose absorbée en $M(x, y, z)$ sera $\mu_j d_j(x, y, z)$. La dose totale correspondant à l'exposition de tous les faisceaux sera donc :

$$d_\mu(x, y, z) = \sum_{j=1}^q \mu_j d_j(x, y, z) \quad (4.4)$$

où on a noté $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ le vecteur contenant les pondérations.

La balistique du traitement sera donc définie par l'ensemble des faisceaux ainsi que par les pondérations correspondantes. Un accélérateur linéaire (cf. Fig. 4.4) ne produit

généralement qu'un faisceau à la fois : le traitement consistera donc en q irradiations successives, dont l'effet radiobiologique est équivalent à q irradiations simultanées.

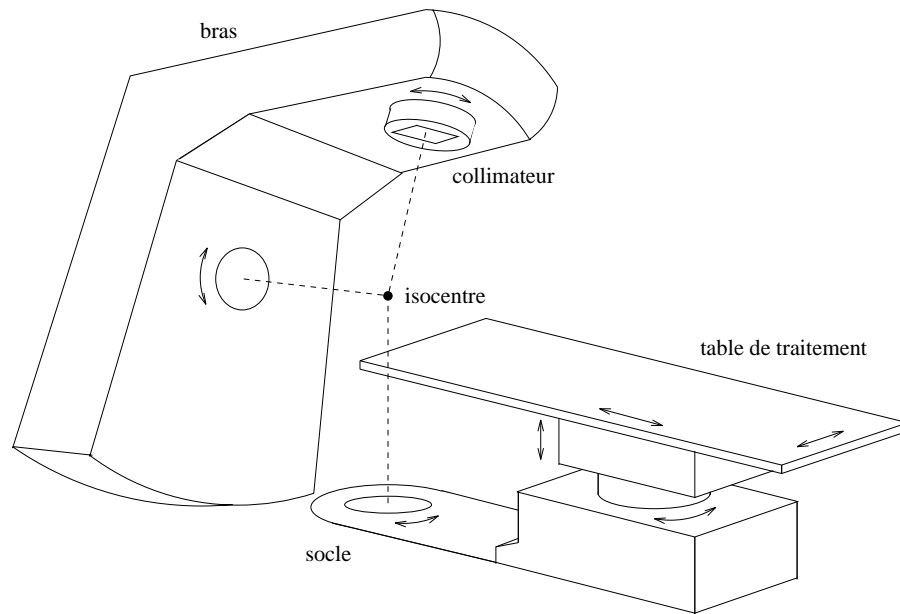


Figure 4.4: Accélérateur linéaire : les 7 degrés de liberté permettent de nombreuses configurations.

4.3.2 Formulation du problème

Dans le cadre de la radiothérapie de la prostate, on distingue, suivant leurs exigences dosimétriques, trois sortes de tissus :

- la *tumeur prostatique* (P) est la zone cible : d'après le protocole n°22911 de l'EORTC (European Organization for Research and Treatment of Cancer) actuellement pratiqué à Grenoble, si le praticien prescrit une dose d_P (de 10 à 14 Gy pour le traitement localisé), alors, en tout point de cette zone cible, l'écart de la dose reçue par rapport à d_P doit être inférieur à 10%. Autrement dit, la dose reçue doit être comprise entre $d_{min} = 0,9 d_P$ et $d_{max} = 1,1 d_P$. L'efficacité du traitement dépend, en partie, de l'homogénéité de la dose reçue par la tumeur.
- la *vessie* (V) et le *rectum* (R) sont des tissus très radiosensibles : la dose absorbée doit être aussi faible que possible.
- le reste des *tissus sains* (S) de la région pelvienne doit également être protégé : on impose à la dose de rester inférieure à une valeur d_M , afin d'éviter tout "point chaud".

Notre stratégie est de fixer au préalable, en tenant compte éventuellement de la forme de la cible, le nombre de faisceaux et leur géométrie, puis de déterminer les pondérations optimales en fonction des contraintes dosimétriques que nous avons énoncé. Il s'agit

maintenant de définir cette phase d'optimisation, qui consiste à exprimer notre problème comme minimisation d'une fonctionnelle J sur un ensemble de contraintes Δ :

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{\mu \in \Delta} J(\mu)$$

Nous avons défini la **fonctionnelle** J par :

$$J(\mu) = \sum_{\mathcal{R} \in \{P, V, R\}} \left(\alpha_{\mathcal{R}} \cdot E_{\mathcal{R}}(d_{\mu}^2) - \beta_{\mathcal{R}} \cdot (E_{\mathcal{R}}(d_{\mu}))^2 \right) \quad (4.5)$$

$E_{\mathcal{R}}(f)$ est la moyenne de f sur la région \mathcal{R} . $\alpha_{\mathcal{R}}$ et $\beta_{\mathcal{R}}$ sont des coefficients de pondération permettant, d'une part, d'accorder plus ou moins d'importance à \mathcal{R} par rapport aux autres régions, mais également d'obtenir un compromis entre la minimisation et l'homogénéisation de la dose dans \mathcal{R} . En effet :

- pour la *prostate*, en choisissant $\alpha_P = \beta_P = 1$, le terme correspondant dans J devient :

$$E_P(d_{\mu}^2) - (E_P(d_{\mu}))^2 = \sigma_P^2(d_{\mu})$$

qui est la variance de dose sur la prostate : sa minimisation correspond à une homogénéisation de la dose sur la zone cible.

- pour la *vessie* et le *rectum*, en choisissant $\alpha_{\mathcal{R}} = 0$ et $\beta_{\mathcal{R}} = -1$, la dose moyenne sur \mathcal{R} est minimisée. Cependant, ceci n'interdit pas des zones à forte dose. Pour $\alpha_{\mathcal{R}} = 1$ et $\beta_{\mathcal{R}} = 0$, le terme à minimiser n'est autre que $(E_{\mathcal{R}}(d_{\mu}))^2 + \sigma_{\mathcal{R}}^2(d_{\mu})$, ce qui permet de minimiser *et* d'homogénéiser la dose sur \mathcal{R} .

Nous avons donc choisi pour J une expression assez générale, les coefficients $\alpha_{\mathcal{R}}$ et $\beta_{\mathcal{R}}$ représentant des degrés de liberté pour le praticien, qui lui permettront éventuellement de s'adapter aux divers cas de figure. On peut noter, d'après (4.4), que J est une forme quadratique. Afin de donner un sens à sa minimisation, il est donc indispensable qu'elle soit positive. Pour cela, une condition suffisante sur les coefficients de pondération est :

$$\forall \mathcal{R} \in \{P, V, R\} \quad \alpha_{\mathcal{R}} \geq 0 \quad \alpha_{\mathcal{R}} \geq \beta_{\mathcal{R}} \quad (4.6)$$

Dans ce cas, on obtient en effet :

$$J(\mu) \geq \sum_{\mathcal{R} \in \{P, V, R\}} \alpha_{\mathcal{R}} \sigma_{\mathcal{R}}^2(d_{\mu}) \geq 0$$

Les **contraintes** sur μ sont toutes linéaires :

- $\mu \geq 0$ ($- \forall j \in \{1, \dots, q\} \quad \mu_j \geq 0$)
- $\forall (x, y, z) \in P \quad d_{min} \leq d_{\mu}(x, y, z) \leq d_{max}$
- $\forall (x, y, z) \in S \quad d_{\mu}(x, y, z) \leq d_M$

Le problème (\mathcal{P}) étant posé analytiquement, il est maintenant nécessaire de le discrétiser afin de pouvoir le résoudre numériquement.

4.3.3 Discrétisation du problème

Considérons une région \mathcal{R} , dont on extrait les points (x_i, y_i, z_i) ($i = 1 \dots n$). On appelle $d_\mu^{\mathcal{R}}$ le vecteur de dimension n dont la i ème composante est la dose reçue en (x_i, y_i, z_i) lorsque la pondération vaut μ . D'après (4.4), nous pouvons écrire :

$$\forall i = 1 \dots n \quad (d_\mu^{\mathcal{R}})_i = \sum_{j=1}^q \mu_j d_j(x_i, y_i, z_i)$$

Ceci s'écrit matriciellement sous la forme :

$$d_\mu^{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}} \mu$$

où $A_{\mathcal{R}}$ est une matrice de dimensions $n \times q$ telle que : $(A_{\mathcal{R}})_{ij} = d_j(x_i, y_i, z_i)$.

On rejoint ainsi l'approche discrète présentée au 4.2.2. Supposons la région \mathcal{R} homogène, hypothèse déjà effectuée au Chapitre 2 : alors si les points (x_i, y_i, z_i) sont répartis sur une grille tridimensionnelle régulière, on peut approcher $E_{\mathcal{R}}(f)$ par :

$$E_{\mathcal{R}}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)$$

Ecrivons maintenant l'expression matricielle de la **fonctionnelle** J . Nous avons, d'une part :

$$E_{\mathcal{R}}(d_\mu^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_\mu(x_i, y_i, z_i)^2 = \frac{1}{n} (d_\mu^{\mathcal{R}})^t d_\mu^{\mathcal{R}} = \frac{1}{n} (A_{\mathcal{R}} \mu)^t (A_{\mathcal{R}} \mu) = \frac{1}{n} \mu^t (A_{\mathcal{R}}^t A_{\mathcal{R}}) \mu$$

où on a noté M^t la transposée de M .

Par ailleurs, notons $\mathbf{1}_n$ le vecteur de dimension n dont toutes les composantes sont égales à 1. Alors il vient :

$$\begin{aligned} (E_{\mathcal{R}}(d_\mu))^2 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_\mu(x_i, y_i, z_i) \right)^2 = \left(\frac{1}{n} \mathbf{1}_n^t d_\mu^{\mathcal{R}} \right)^2 = \frac{1}{n^2} (\mathbf{1}_n^t d_\mu^{\mathcal{R}})^t (\mathbf{1}_n^t d_\mu^{\mathcal{R}}) \\ &= \frac{1}{n^2} (\mathbf{1}_n^t A_{\mathcal{R}} \mu)^t (\mathbf{1}_n^t A_{\mathcal{R}} \mu) = \frac{1}{n^2} \mu^t (A_{\mathcal{R}}^t \mathbf{J}_n A_{\mathcal{R}}) \mu \end{aligned}$$

où $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n^t \mathbf{1}_n$ est la matrice carrée de dimension n dont tous les éléments sont égaux à 1.

Nous obtenons donc finalement l'expression de J (cf. (4.5)) :

$$J(\mu) = \mu^t H \mu$$

avec :

$$H = \sum_{\mathcal{R} \in \{P, V, R\}} \left(\frac{\alpha_{\mathcal{R}}}{n_{\mathcal{R}}} A_{\mathcal{R}}^t A_{\mathcal{R}} - \frac{\beta_{\mathcal{R}}}{n_{\mathcal{R}}^2} A_{\mathcal{R}}^t \mathbf{J}_{n_{\mathcal{R}}} A_{\mathcal{R}} \right)$$

H est la matrice de la forme quadratique : elle est symétrique, de dimension q . Les conditions (4.6) étant vérifiées, H est également une matrice positive.

Les **contraintes** s'expriment sous forme matricielle par :

- $\mu \geq 0$
- $d_{min} \cdot \mathbf{1}_{n_P} \leq A_P \mu \leq d_{max} \cdot \mathbf{1}_{n_P}$
- $A_S \mu \leq d_M \cdot \mathbf{1}_{n_S}$

que nous écrivons :

$$C\mu \leq D$$

En définitive, il nous faut donc minimiser une forme quadratique sur un simplexe, problème classique que nous avons déjà rencontré au 3.4.5.1. La matrice H étant positive, notre problème admet une solution lorsque l'ensemble Δ des contraintes est non vide.

Précisons, de plus, la propriété suivante : soient k_1, k_2, k_3 trois réels strictement positifs. Posons $H' = k_1 H, C' = k_2 C, D' = k_3 D$. Alors on montre sans difficulté que :

$$\bar{\mu} \text{ est solution de } \min_{C'\mu \leq D'} \mu^t H' \mu \quad - \quad \frac{k_2}{k_3} \bar{\mu} \text{ est solution de } \min_{C\mu \leq D} \mu^t H \mu$$

Cette propriété nous permet d'affirmer que, lorsqu'on ne connaît les matrices de dose qu'à un coefficient multiplicatif près (ce qui correspond aux méthodes habituelles de calcul, cf. Chapitre 2), et, par ailleurs, lorsqu'on précise également les contraintes de dose à un coefficient près (la plupart du temps en pourcentages), la solution obtenue et la solution "réelle" sont deux vecteurs liés. En pratique, ceci est suffisant car le traitement est toujours précédé d'un étalonnage de l'accélérateur.

4.4 Mise en œuvre

L'optimisation dosimétrique, telle qu'elle est décrite ci-avant, ne peut être réalisée que dans un large contexte informatique permettant d'intégrer les informations anatomiques et dosimétriques. Le Service de Radiothérapie du C.H.U. de Grenoble possède un système dosimétrique ("Scandiplan" de Scanditronix) destiné à l'usage des radiophysiciens, mais n'offrant aucune possibilité d'interface avec le réseau informatique. La mise en œuvre a donc fait l'objet d'une programmation indépendante. Nous décrivons, dans un premier temps, la démarche globale dans laquelle elle s'inscrit, avant de présenter les différents résultats.

4.4.1 La démarche globale

4.4.1.1 Les données d'imagerie et leur pré-traitement

L'examen habituellement pratiqué avant une étude dosimétrique est la tomодensitométrie (scanner) ou l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). Dans le cas du cancer de la prostate, on acquiert une reconstruction de coupes transversales d'un patient allongé sur le dos (position de *decubitus dorsal*). Ces coupes s'étendent du bas des ischions au bord supérieur de la vessie ; dans notre cas, et ce afin d'obtenir un calcul de doses précis, elles sont au nombre d'une centaine et la distance intercoupe est de 2 mm seulement. Leur résolution est de 256×256 pixels.

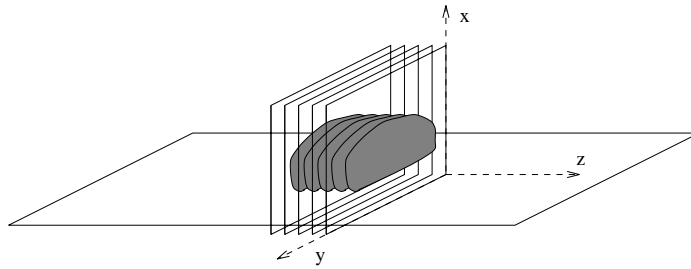
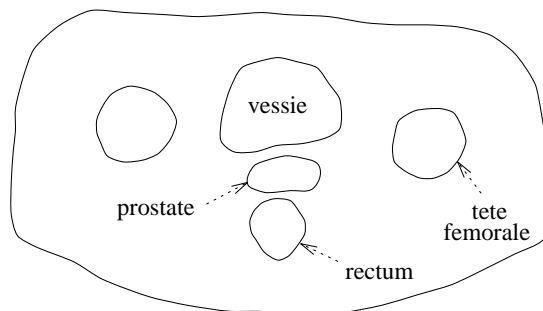


Figure 4.5: Coupes transversales du bassin pour un patient supposé en decubitus dorsal. L'axe z est généralement dirigé des pieds vers la tête.

Afin de noter la différence entre des images scanner et IRM, nous avons choisi deux coupes se situant au même niveau du bassin (cf. Fig. 4.6, cf. Fig. 4.7). L'emplacement et la forme des différents organes dépendent évidemment de l'individu, mais les positions de la prostate, de la vessie, et du rectum sont approximativement les suivantes :



Sur l'image scanner, la vessie apparaît très clairement grâce à un produit de contraste injecté au patient avant le traitement. Ce produit provoque toutefois quelques artefacts. Par ailleurs, les os apparaissent en blanc alors que la reconstruction des tissus mous est peu détaillée.

Pour ce qui est de l'image IRM, on notera par contre la très bonne restitution de tous les tissus mous : la prostate, la vessie, et le rectum y sont très nets. On remarquera

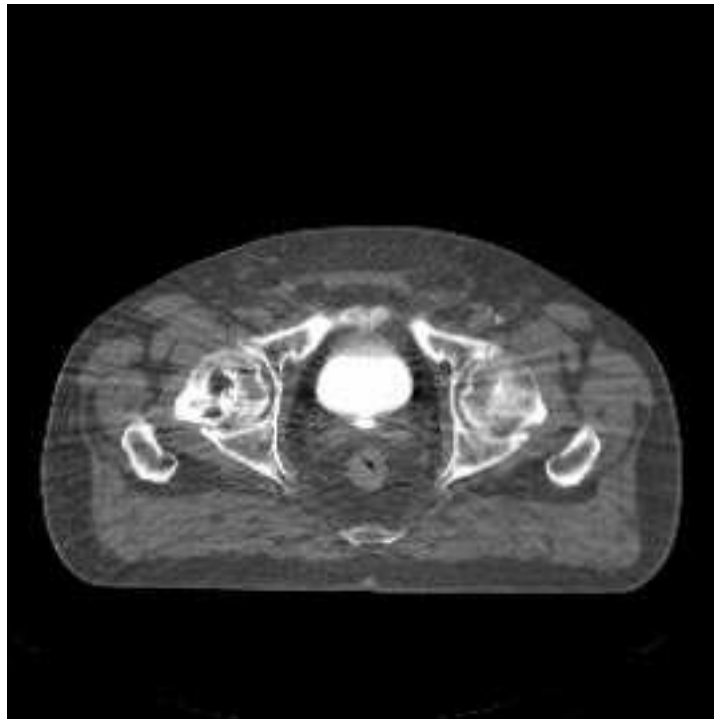


Figure 4.6: Coupe scanner

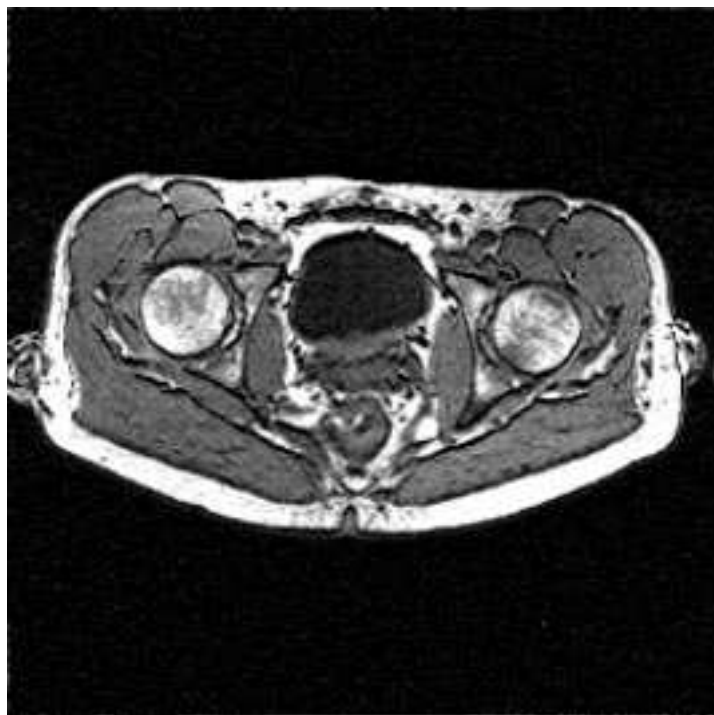


Figure 4.7: Coupe IRM

également la couche graisseuse se situant sous la peau, qui, contrairement au scanner, apparaît de manière très contrastée.

L'IRM est manifestement l'examen le plus approprié pour la région prostatique : en pratique, pour des raisons de disponibilité des appareils, c'est pourtant le scanner qui est de loin le plus utilisé.

Les images doivent subir un pré-traitement ayant pour but de les interpréter :

- la **segmentation** consiste à déterminer, sur les coupes, les contours des différents organes. C'est, de loin, l'étape la plus longue, et elle est faite de manière :
 - *manuelle* pour la prostate, la vessie et le rectum, ce qui représente environ une cinquantaine de coupes. Ce travail très délicat doit être réalisé par un médecin. Dans le cas de la prostate, en effet, le contour de la glande apparaissant très peu, le praticien sera parfois amené à utiliser son expérience pour le “deviner”.
 - *semi-automatique* pour les contours du corps, donc sur *toutes* les coupes. Cette segmentation est moins problématique car l'image présente un fort gradient au niveau des contours recherchés.

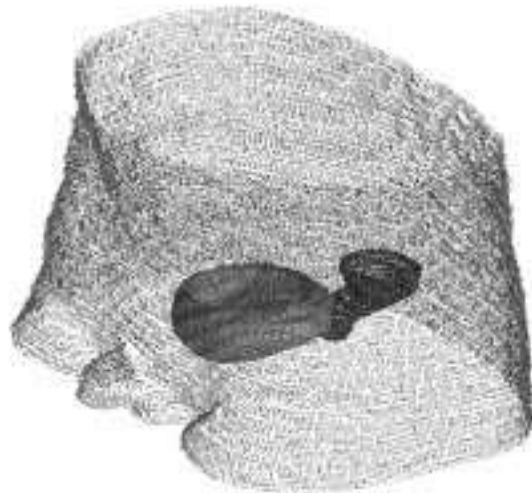


Figure 4.8: Reconstruction du bassin et de différents organes par segmentation ; on distingue, sur cette image, la vessie (qui cache la prostate) et le rectum.

- à chaque contour est associée une **carte binaire**, de même format que l'image, et qui vaut 1 à l'intérieur du contour, 0 à l'extérieur : on accède ainsi à une description volumique des différents organes. Ceci est notamment indispensable dans le cas du corps, afin de réaliser la correction d'obliquité du calcul de dose (cf. 2.3.3)

4.4.1.2 Le choix des faisceaux

Il est nécessaire, afin de définir l'ensemble des faisceaux, de se fixer un référentiel lié au patient :

- l'*origine* est habituellement confondue avec le point de concours des différents faisceaux. Nous avons choisi de placer ce point au centre de la plus petite boule contenant la prostate, qui se trouve ainsi bien "ciblée". L'algorithme que nous avons développé au Chapitre 3 permet de déterminer cette origine sans problème.
- on conserve naturellement les *axes* définis par l'examen scanner ou IRM (cf. Fig. 4.5).

Il s'agit ensuite de fixer le nombre de faisceaux (concentriques, d'énergie 25 MeV), ainsi que leur géométrie :

- sur un accélérateur linéaire, la **source** est toujours située à 1 m de l'isocentre. Dans le référentiel $Oxyz$ lié au patient, elle peut donc être repérée en coordonnées sphériques, par le couple (θ, φ) (cf. Fig. 4.9). En pratique, un ensemble de sources sera souvent défini par le produit cartésien de deux subdivisions de $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ et $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$: $\{\theta_i\} \times \{\varphi_j\}$ ($i = 1 \dots n_\theta, j = 1 \dots n_\varphi$). Par exemple, le traitement classique de q faisceaux coplanaires équirépartis correspond à :

$$\begin{aligned} - \theta_{min} &= \theta_{max} = 0 \\ - \varphi_{min} &= 0 \quad \varphi_{max} = 2\pi \quad \varphi_j = \frac{2\pi}{q}j \quad (j = 1 \dots q) \end{aligned}$$

- les **axes** sont tous dirigés de la source vers l'isocentre.

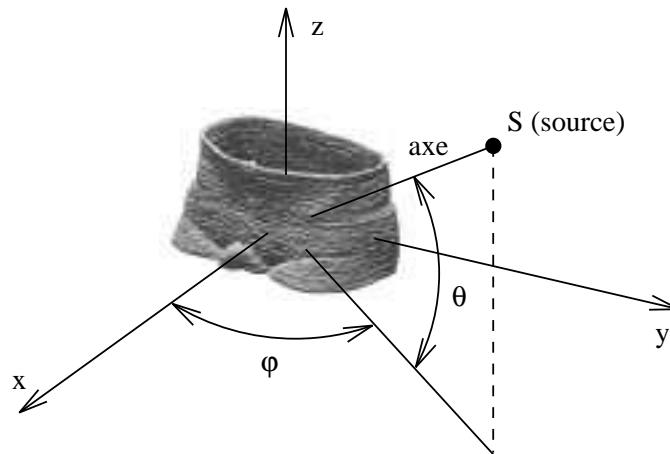


Figure 4.9: Définition d'un faisceau par rapport au bassin du patient.

- pour ce qui est de la **section** des faisceaux, nous avons envisagé plusieurs possibilités :
 - une section *circulaire*, de diamètre 7 cm à l'isocentre : pour ce faisceau, nous avons construit, à partir de mesures expérimentales, un modèle de calcul de dose (cf. 2.4). Un tel protocole, composé de faisceaux à section identique, présente l'avantage de ne nécessiter qu'un seul cache.

- une section *rectangulaire*, de taille adaptée à la forme de la cible. On utilise ici la méthode dite de “Beam Eye View” (BEV), qui consiste, pour un faisceau, à travailler sur l’image de la cible telle qu’on la verrait depuis la source. On détermine sur cette image, qui est orthogonale à l’axe du faisceau, le rectangle d’aire minimale qui contient la cible (cf. Fig. 4.10 (a)). Le calcul de la dose se fait par la méthode de Clarkson. De tels faisceaux peuvent être réalisés sans cache focalisé, avec le seul diaphragme, rectangulaire et réglable, de l’accélérateur linéaire.
- une section *polygonale*, de forme adaptée à la cible. On se base à nouveau sur le BEV pour déterminer automatiquement un polygone satisfaisant (cf. Fig. 4.10 (b)). Ces faisceaux peuvent être réalisés avec un cache focalisé, mais il est hors de question, en pratique, de réaliser plus de 4 ou 5 caches différents pour un même patient (n’oublions pas, de plus, que ces caches doivent être interchangeés pendant la séance de traitement!). Cependant, le *collimateur multilames*, dont la forme est réglable, représente une solution technologique tout à fait adaptée à notre approche. Il n’est toutefois pas encore disponible au C.H.U. de Grenoble.

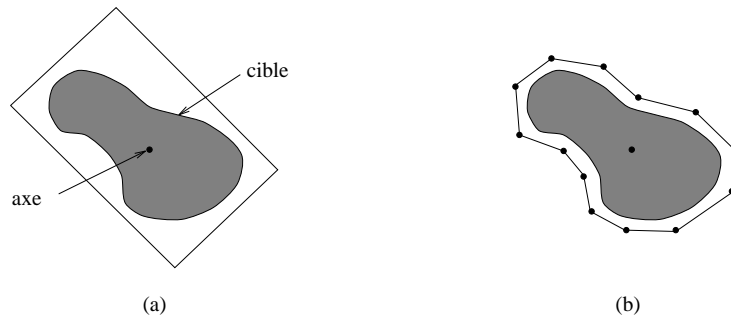


Figure 4.10: Choix d’un faisceau de section rectangulaire (a) ou polygonale (b) sur une image de Beam Eye View.

4.4.1.3 L’optimisation

Elle se déroule en plusieurs étapes :

- la détermination, pour chaque région \mathcal{R} , de $n_{\mathcal{R}}$ points sur une grille tridimensionnelle régulière. Habituellement, $n_{\mathcal{R}}$ varie entre quelques centaines et quelques milliers;
- le calcul des matrices de dose $A_{\mathcal{R}}$;
- le choix des doses de prescription d_P et d_M ;
- le choix des coefficients $\alpha_{\mathcal{R}}$ et $\beta_{\mathcal{R}}$;
- le calcul de H , matrice de la forme quadratique J , ainsi que des matrices C et D représentant les contraintes;
- la détermination des pondérations optimales en utilisant la librairie IMSL. Il peut n’y avoir aucune solution lorsque les contraintes ne sont pas réalisables.

Les deux premières étapes sont les plus longues. Cependant, pour un même patient, elles ne sont réalisées qu'une fois, et il est ensuite possible de tester la qualité des résultats suivant les doses de prescription et les coefficients de pondération de la fonctionnelle.

Par ailleurs, on ne conserve, après l'optimisation, que les temps d'exposition significatifs : ainsi, nous avons décidé de tronquer les μ_i tels que :

$$\mu_i < 0,01 \cdot \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \mu_j$$

4.4.1.4 L'évaluation des résultats

Après avoir calculé les pondérations optimales, il est indispensable, pour le praticien, de pouvoir juger la distribution de dose correspondante afin de s'assurer qu'elle lui convient, ou, éventuellement, de l'améliorer en changeant certains paramètres. Nous avons employé, pour évaluer les résultats :

- le calcul des doses **minimale**, **maximale**, **moyenne**, ainsi que l'**écart-type** de dose pour la prostate, la vessie, et le rectum.
- la représentation de l'**histogramme dose-volume cumulé** pour les mêmes régions. Si l'on considère une région \mathcal{R} et une distribution de dose d , l'histogramme correspondant est défini par la fonction F suivante :

$$F : R_+ \longrightarrow [0, 1]$$

$$t \longmapsto F(t) = \frac{\omega(V_t)}{\omega(\mathcal{R})}$$

où :

$$V_t = \{(x, y, z) \in \mathcal{R} / d(x, y, z) \geq t\}$$

$\omega(A)$ est le volume de A .

Ainsi, $F(t)$ est le pourcentage, en volume, de points recevant une dose supérieure à t . $F(0) = 1$, la fonction F est décroissante, et elle vaut 0 pour toute valeur de t supérieure à la dose maximale sur \mathcal{R} . On montre également que l'aire couverte par l'histogramme (soit $\int_0^{+\infty} F(t) dt$) est la dose moyenne sur la région \mathcal{R} .

L'histogramme dose-volume permet d'apprécier la répartition de la dose sur un organe. Pour ce qui est de la prostate, par exemple, nous avons représenté Figure 4.11 l'histogramme idéal, qui correspond à une dose uniforme et égale à la dose de prescription d_P .

- la **visualisation des isodoses** : habituellement, elle se fait sur les coupes d'origine, en particulier la coupe isocentrique lorsque les faisceaux sont coplanaires. Dans notre cas, la distance intercoupe étant de 2 mm seulement, nous avons pu obtenir,

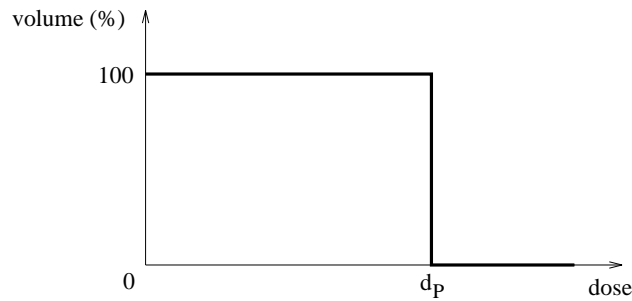


Figure 4.11: Représentation de l'histogramme dose-volume cumulé correspondant à une dose uniforme égale à d_P .

par simple interpolation, une reconstruction satisfaisante de coupes sagittales et frontales, et visualiser les courbes isodoses sur ces coupes.

- une **représentation tridimensionnelle** du patient, des différents organes, et d'une surface isodose, effectuée à partir de la totalité des contours. Ce dernier outil est cependant complémentaire, et ne permettrait pas, à lui seul, de juger véritablement la dosimétrie.

4.4.2 Les résultats

Dans cette partie, nous testons notre méthode d'optimisation en l'appliquant dans divers cas de figure. Nous nous plaçons, dans un premier temps, dans le contexte du protocole actuellement en place pour les irradiations de la prostate. Nous étudions ensuite l'influence de la géométrie des faisceaux sur la dosimétrie avec, entre autres, les faisceaux conformatifs (à section rectangulaire et polygonale), dont la géométrie est adaptée à celle de la cible. Nous observons enfin l'influence des différents paramètres (coefficients de pondération de la fonctionnelle J , doses de prescription).

Nous nous sommes limités, pour les tests, à des faisceaux coplanaires ($\theta = 0$). En effet, le nombre de coupes, bien que déjà très élevé, est insuffisant pour permettre le calcul informatique de la correction d'obliquité dans le cas d'incidences réellement significatives (par exemple $\theta = 10^\circ$). Néanmoins, il ne fait aucun doute que ce type de problème sera bientôt résolu avec l'amélioration des moyens d'imagerie.

Notons enfin que nous avons fixé, dans tous les cas, la dose de prescription : $d_P = 100$ (cf. page 113). Ainsi, la dose reçue en tout point de la prostate doit être comprise entre $d_{min} = 90$ et $d_{max} = 110$. La dose maximale reçue par les tissus sains (d_M) reste, par contre, un paramètre du problème d'optimisation.

4.4.2.1 Le traitement actuel

Rappelons que le traitement actuellement pratiqué pour les cancers localisés de la prostate comporte quatre champs carrés de 9 cm de côté à l'isocentre : un champ antéro-postérieur,

un champ postéro-antérieur, et deux champs latéraux. Habituellement, les physiciens ajustent les pondérations en procédant par essais successifs ; cependant, ils avouent eux-même ne pas y accorder une très grande importance, car il est flagrant que la taille des champs ne permet pas d'épargner la vessie et le rectum.

Nous avons, pour ces faisceaux, utilisé notre méthode afin de déterminer les pondérations optimales. Les paramètres choisis sont les suivants :

- $\alpha_P = \beta_P = 1, \alpha_V = \alpha_R = 0, \beta_V = \beta_R = -1$;
- $d_M = 60$ (pour $d_M < 60$, les contraintes ne peuvent être satisfaites).

On obtient ainsi quatre faisceaux dont les pondérations, qui varient entre 1,8 et 3, sont donc du même ordre de grandeur. Les résultats dosimétriques (cf. Table 4.1) montrent, d'une part, une très grande homogénéité de dose sur la prostate. Ce point est donc positif pour l'efficacité du traitement, mais n'est guère étonnant au vu de la taille des faisceaux. Cependant, on constate également l'énorme inconvénient de ces faisceaux de grandes dimensions, qui mènent à une dose élevée sur la vessie et, surtout, le rectum. Pour ce dernier, la dose moyenne s'approche en effet dangereusement de la dose de prescription, ce qui explique clairement les inflammations qui accompagnent systématiquement ce protocole de traitement.

Nous avons, par ailleurs, représenté les différents histogrammes dose-volume (cf. Fig. 4.13). Sur l'axe des abscisses, les doses y sont normalisées par rapport à la dose maximale. On note que l'histogramme de la prostate se rapproche du cas idéal, et que la vessie est plus épargnée que le rectum.

La représentation des isodoses sur la coupe isocentrique (cf. Fig. 4.14) traduit bien, enfin, la forme carrée et les directions des champs, et permet de juger, partiellement, la distribution de dose. Notons que la vessie n'apparaît pas sur cette coupe, assez basse. L'isodose à 90, la plus "serrée" autour de la zone cible, déborde toutefois largement autour. Il apparaît donc clairement que c'est en adaptant la géométrie des faisceaux que l'on parviendra à une amélioration dosimétrique.

4.4.2.2 Influence de la géométrie des faisceaux

Pour 16 faisceaux coplanaires équirépartis, nous avons cherché à déterminer l'influence de la section des faisceaux (circulaire, rectangulaire, polygonale) sur l'optimisation de la pondération. Pour cela, nous avons conservé, pour les coefficients $\alpha_{\mathcal{R}}$ et $\beta_{\mathcal{R}}$, les mêmes valeurs qu'au 4.4.2.1. Nous avons, par contre, choisi $d_M = 40$, ce qui était impossible dans le cas précédent.

On obtient ainsi de 11 à 13 pondérations non nulles. La principale différence entre ces faisceaux et ceux utilisés précédemment est leur plus petite taille. Ainsi, la première

| | | section carrée | section circulaire | section rectangulaire | section polygonale |
|----------|------------|-------------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|
| prostate | minimum | 90 | 90 | 90 | 90 |
| | maximum | 93,7 | 108,4 | 110 | 110 |
| | moyenne | 91,3 | 103 | 106,5 | 106,3 |
| | écart-type | 0,7 | 3 | 4,6 | 4 |
| vessie | minimum | 3,5 | 2,1 | 2,2 | 2,2 |
| | maximum | 92,5 | 95,3 | 45,7 | 59,3 |
| | moyenne | 48,8 | 16,4 | 5,7 | 6,4 |
| | écart-type | 33,6 | 20,8 | 8 | 9,6 |
| rectum | minimum | 3,3 | 2,1 | 2,2 | 2,2 |
| | maximum | 90,9 | 101 | 110 | 108,7 |
| | moyenne | 72,5 | 44,8 | 50,8 | 35,1 |
| | écart-type | 26,3 | 33,9 | 39 | 31 |

Table 4.1: Valeurs caractéristiques de la dosimétrie pour les différents organes et faisceaux.

conséquence est la relative perte d’homogénéité de dose au niveau de la prostate (cf. Table 4.1), que l’on peut constater également, sur les histogrammes dose-volume, par des courbes plus “lisses” (cf. Fig. 4.15, Fig. 4.16, Fig. 4.17). Par contre, la dose sur la vessie et le rectum est nettement plus faible que dans le cas de 4 champs carrés. On constate ainsi que, pour la vessie, la meilleure solution est la section rectangulaire, alors que pour le rectum, c’est la section circulaire. De manière générale, il est clair que le meilleur compromis est la section polygonale, qui permet réellement de *viser* la cible.

La représentation des courbes isodoses sur la coupe isocentrique (cf. Fig. 4.18, Fig. 4.19, Fig. 4.20) permet également d’apprécier la dosimétrie. On notera ainsi que, dans le cas de la section circulaire, l’isodose à 105 et le maximum de dose sont décalés par rapport à la cible. Pour la section polygonale, par contre, cette isodose est quasiment confondue avec le contour de la cible, ce qui prouve une très bonne qualité d’irradiation. En comparaison avec les champs carrés (cf. Fig. 4.14), le progrès est appréciable. Nous avons complété cette image par la représentation de courbes isodoses sur les coupes isocentriques *sagittale* (cf. Fig. 4.21) et *frontale* (cf. Fig. 4.22), ce qui permet de confirmer que la vessie et le rectum sont épargnés.

Nous avons enfin représenté, pour les trois géométries différentes, la dose dans le plan isocentrique transversal (cf. Fig. 4.23, Fig. 4.24, Fig. 4.25). On remarque, dans chacun des cas, trois directions privilégiées (correspondant à six faisceaux) qui semblent indépendantes de la géométrie. Il semblerait donc que, dans le souci de se maintenir dans un protocole très simple, une telle stratégie “en étoile” soit préférable à la stratégie “en croix” pratiquée habituellement.

4.4.2.3 Influence des différents paramètres

Considérons 32 faisceaux coplanaires à section rectangulaire : notre but, ici, est d'évaluer le rôle des coefficients de pondération $\alpha_{\mathcal{R}}$ et $\beta_{\mathcal{R}}$ d'une part, de la dose maximale d_M imposée aux tissus sains d'autre part.

En premier lieu, lorsque l'on optimise les pondérations pour les mêmes valeurs de $\alpha_{\mathcal{R}}$ et $\beta_{\mathcal{R}}$ que précédemment, et pour $d_M = 40$, les résultats pour 32 faisceaux sont quasiment identiques à ceux obtenus pour 16 faisceaux. Ainsi, les performances ne peuvent être améliorées indéfiniment en augmentant le nombre de faisceaux.

Nous avons ensuite constaté que, pour une valeur donnée de d_M , les résultats dosimétriques ne changent pas de manière significative lorsque l'on fait varier les coefficients $\alpha_{\mathcal{R}}$ et $\beta_{\mathcal{R}}$.

Par contre, lorsque l'on augmente d_M , ce qui signifie "étendre" l'ensemble Δ sur lequel la fonctionnelle J est minimisée, les résultats se trouvent alors améliorés. Ainsi, la courbe représentant la dose moyenne reçue par le rectum en fonction de d_M est décroissante (cf. Fig. 4.12).

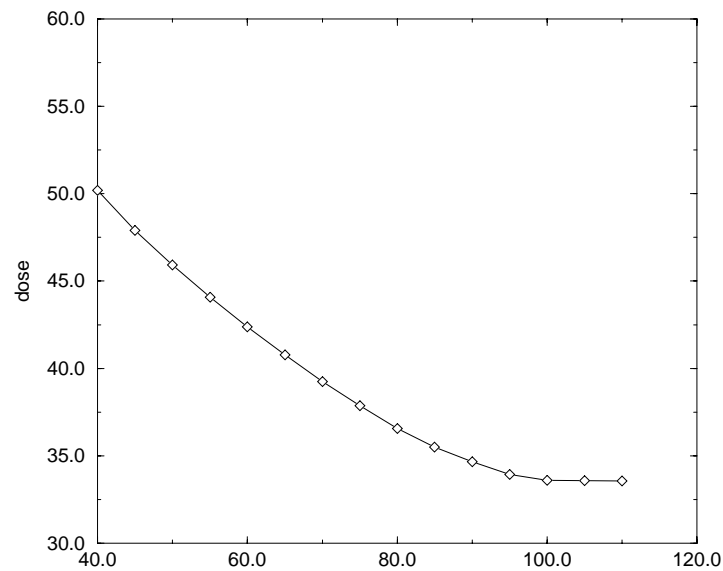


Figure 4.12: Représentation de la dose moyenne reçue par le rectum en fonction de la dose d_M ($\alpha_P = \beta_P = 1$, $\alpha_V = \alpha_R = 0$, $\beta_V = \beta_R = -1$).

En pratique, il appartiendra au praticien de choisir, selon le patient, la dose d_M , qui permet ainsi de réaliser un compromis entre la dose reçue par les tissus radiosensibles (vessie, rectum) et par ceux qui ne le sont pas.

4.5 Conclusion

Les résultats précédents montrent que l'on peut aisément améliorer le traitement actuel de la prostate en adaptant la géométrie et les dimensions des différents faisceaux à la cible. Nous avons constaté une nette amélioration pour des champs circulaires et rectangulaires, mais la meilleure solution est incontestablement celle des champs à section polygonale, qui peuvent être créés par un collimateur multilames.

Rappelons, toutefois, que la grande taille des champs utilisés actuellement a pour but de remédier, d'une part, au positionnement approximatif du patient sur la table de traitement, d'autre part, à ses mouvements incontrôlés. Ces deux problèmes doivent donc être parfaitement résolus afin de permettre une mise en œuvre clinique de protocoles utilisant des champs de plus petite taille. Pour cela, l'équipe de Radiothérapie Conformative du C.H.U. de Grenoble a prévu un repositionnement par échographie accompagné d'une contention du patient au niveau des membres inférieurs ([TMB+93]).

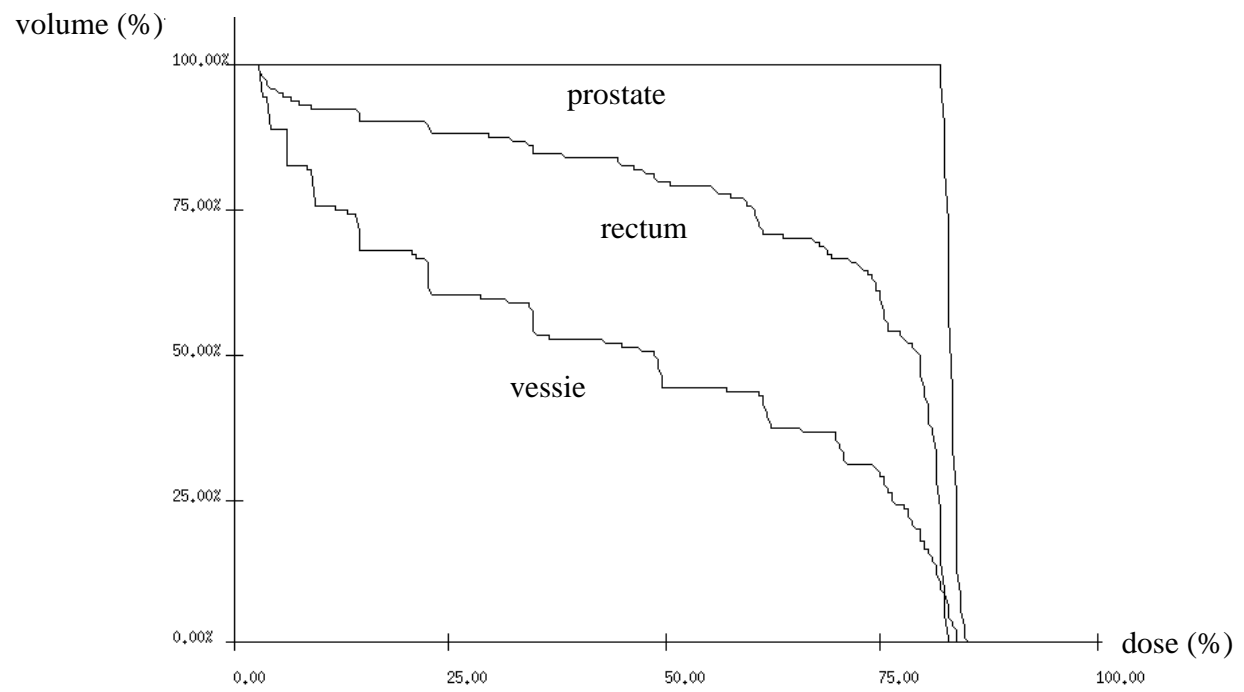


Figure 4.13: Histogrammes dose-volume pour 4 faisceaux carrés de 9 cm à l'isocentre.

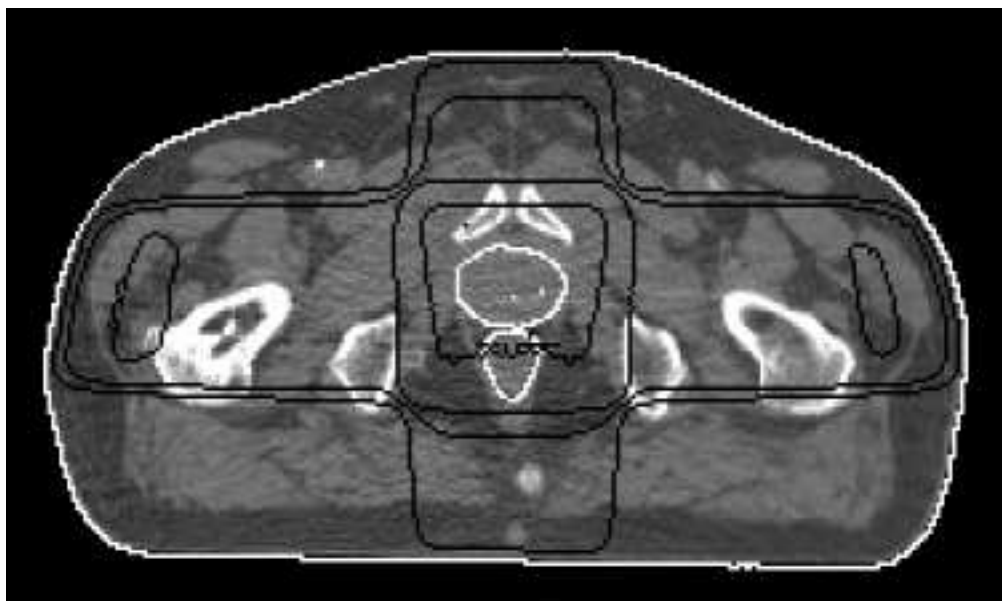


Figure 4.14: Isodoses à 30, 45, 60, 90 pour 4 faisceaux carrés de 9 cm à l'isocentre.

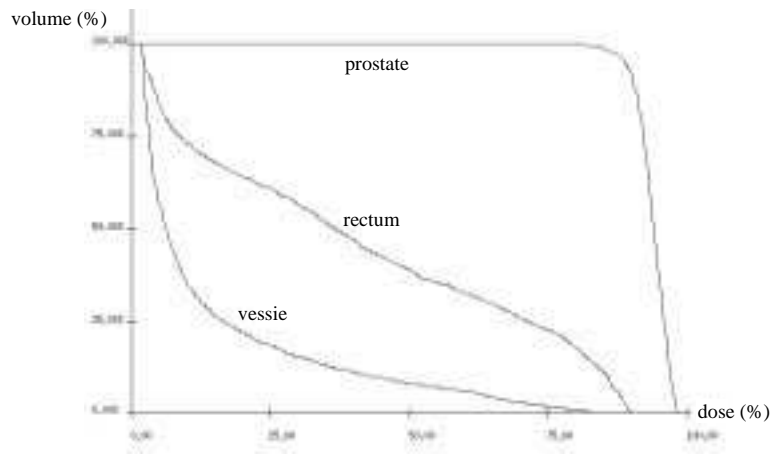


Figure 4.15: Histogrammes dose-volume pour des faisceaux à section circulaire.

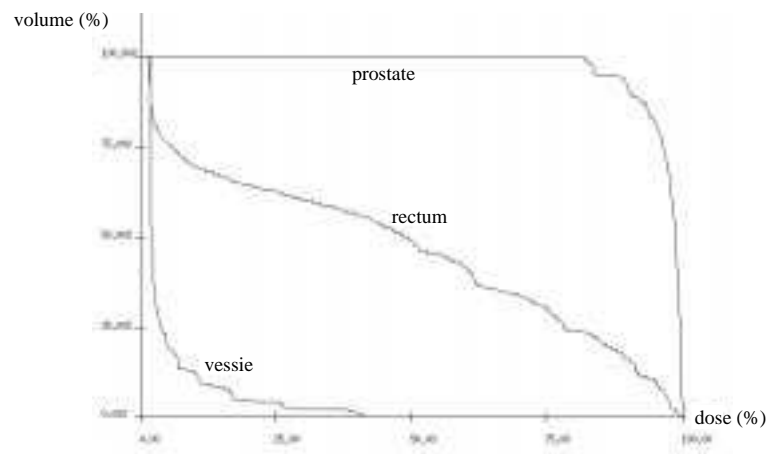


Figure 4.16: Histogrammes dose-volume pour des faisceaux à section rectangulaire.

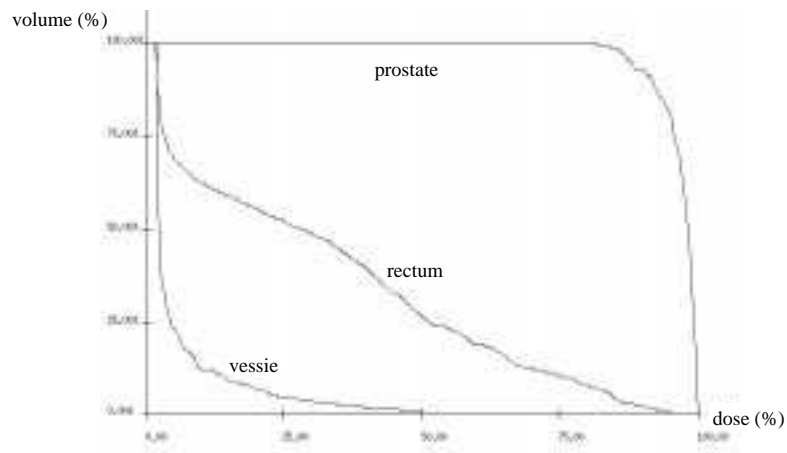


Figure 4.17: Histogrammes dose-volume pour des faisceaux à section polygonale.

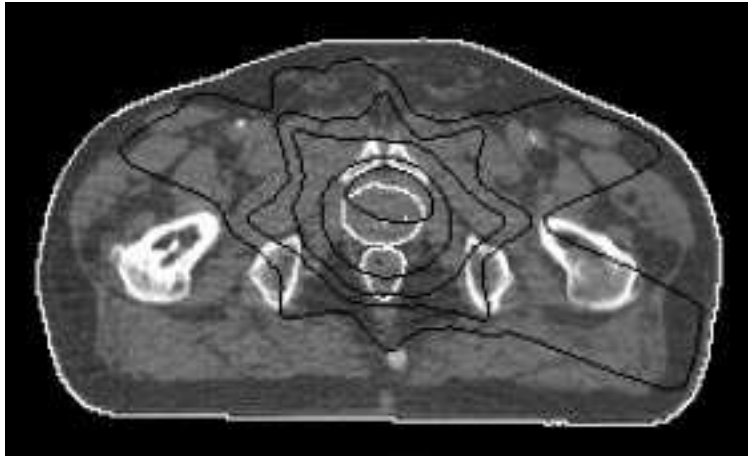


Figure 4.18: Isodoses à 30, 45, 60, 90 et 105 pour des faisceaux à section circulaire.

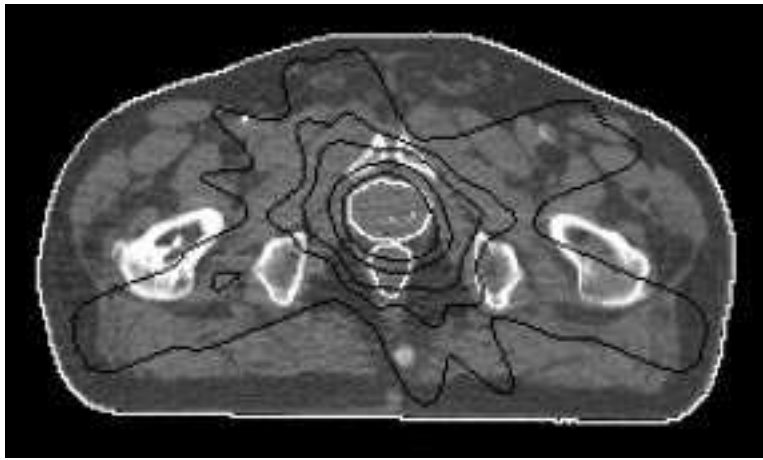


Figure 4.19: Isodoses à 30, 45, 60, 90 et 105 pour des faisceaux à section rectangulaire.

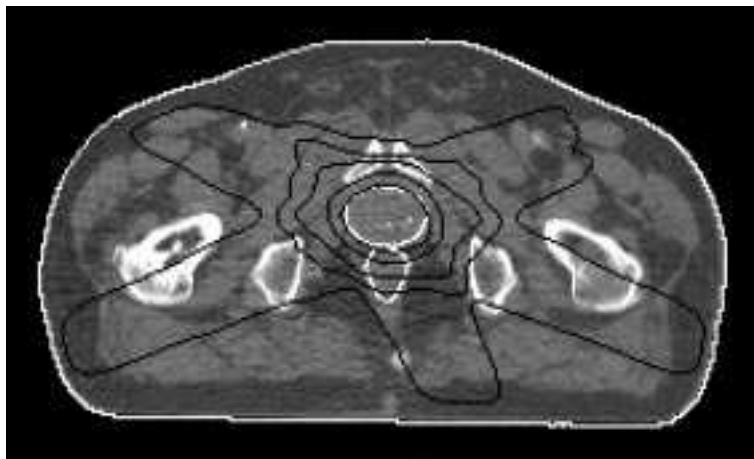


Figure 4.20: Isodoses à 30, 45, 60, 90 et 105 pour des faisceaux à section polygonale.

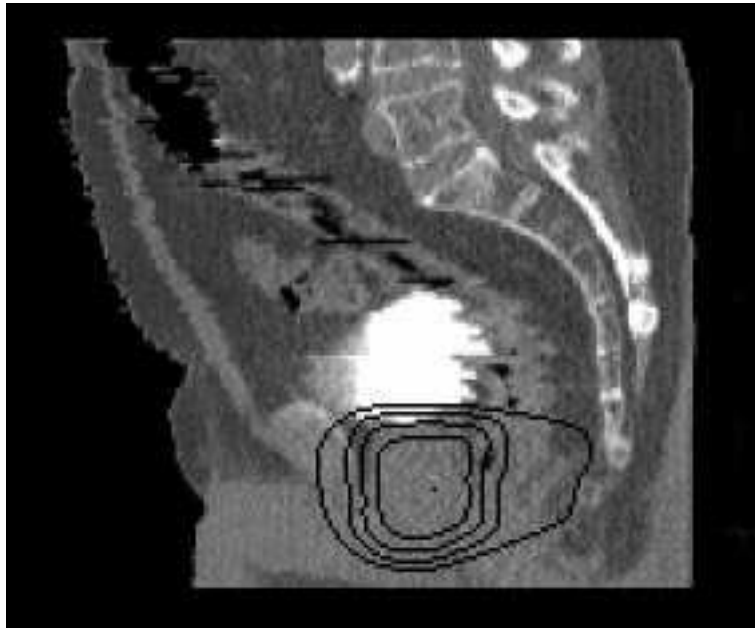


Figure 4.21: Isodoses à 30, 60, 90 et 105 pour des faisceaux à section polygonale (reconstruction sagittale).

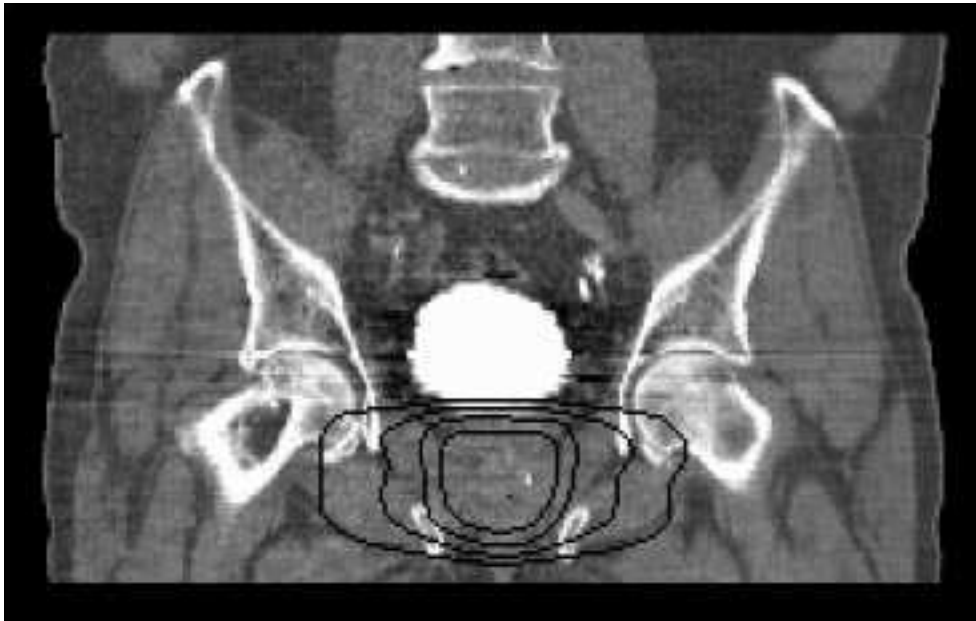


Figure 4.22: Isodoses à 30, 60, 90 et 105 pour des faisceaux à section polygonale (reconstruction frontale).

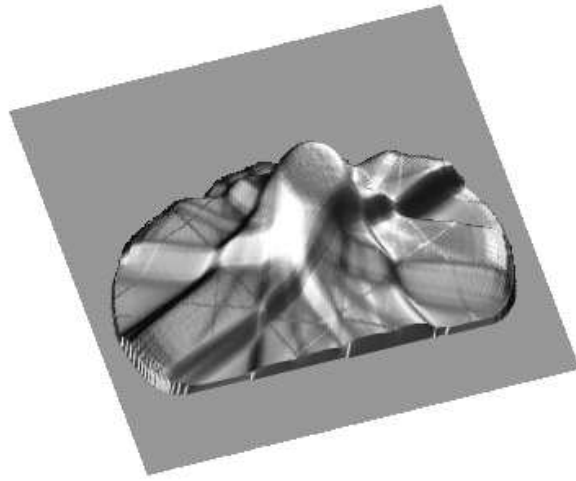


Figure 4.23: Représentation de la dose sur la coupe isocentrique (section circulaire).

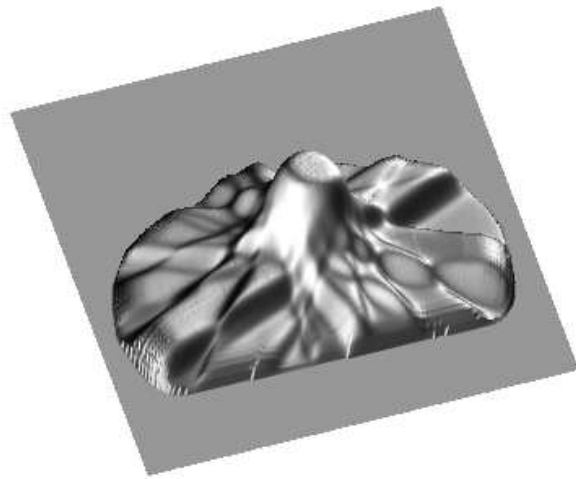


Figure 4.24: Représentation de la dose sur la coupe isocentrique (section rectangulaire).

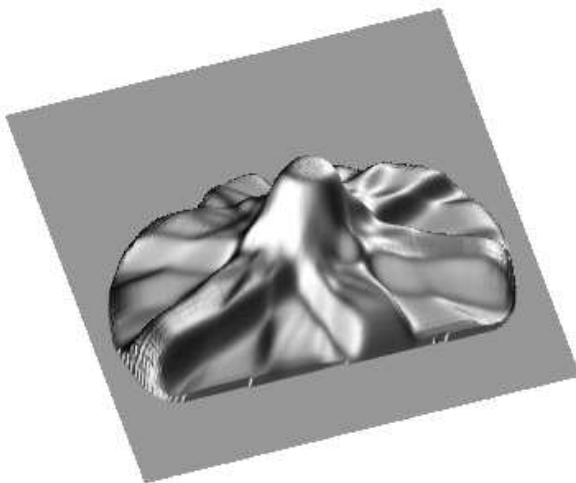


Figure 4.25: Représentation de la dose sur la coupe isocentrique (section polygonale).

Conclusion

Comme le lecteur a pu le constater, le problème de l'optimisation des balistiques d'irradiation est un sujet très éclectique puisqu'il nous a confrontés à des domaines aussi variés que les mathématiques, l'informatique, la radiophysique et, dans une moindre mesure, la médecine.

La dosimétrie directe, qui consiste, pour une balistique donnée, à calculer la dose en un point d'un objet irradié, nous a donné l'occasion, d'une part, d'implémenter la méthode de Clarkson, et, ainsi, de saisir toute la complexité de l'interaction des rayonnements avec la matière. Par ailleurs, nous avons employé, afin de construire le modèle de dose d'un faisceau donné, une méthode utilisant des fonctions spline tridimensionnelles et qui pourrait être généralisée à des dimensions supérieures.

Nous avons retenu de cette partie la comparaison entre les différentes méthodes de calcul de dose : si les méthodes à dominante mathématique et informatique sont plus rapides, elles ne peuvent prendre en compte qu'un nombre insuffisant de paramètres. La puissance de calcul des ordinateurs augmentant de manière régulière, il ne fait aucun doute que les méthodes physiques, avec *Clarkson*, les *kernels*, puis *Monte Carlo*, sont vouées à prendre le dessus.

L'étude détaillée du problème de la plus petite boule englobante ne prenait pas place *naturellement* dans notre sujet. Cependant, elle nous a permis de nous consacrer entièrement aux mathématiques. Ainsi, dans le cas multidimensionnel, nous avons caractérisé la solution de ce problème et sommes parvenus à un algorithme convergeant en un nombre fini d'itérations. Nous avons montré que cet algorithme peut être interprété de manière géométrique d'une part, de manière analytique d'autre part, en utilisant les outils du calcul sous-différentiel. Nous avons ainsi pu constater combien ces domaines peuvent être proches.

La définition de l'optimisation d'un traitement radiothérapeutique est très subjective. Afin de faciliter une éventuelle mise en œuvre, nous nous sommes placés dans le cadre d'un protocole multi-faisceaux, dont la forme peut être pré-déterminée en fonction de la cible. Nous avons veillé ensuite à ce que notre formulation du problème reste aussi proche que possible des souhaits exprimés par les praticiens. Mathématiquement, ceci nous a mené à la minimisation d'une forme quadratique sous contraintes linéaires, qui fournit

les pondérations des différents faisceaux. Les meilleurs résultats sont obtenus pour des faisceaux à section polygonale, qui nécessitent l'utilisation d'un collimateur multilames. Les dosimétries correspondantes montrent, par rapport aux traitements actuels, une très nette baisse des doses reçues par la vessie et le rectum tout en maintenant une bonne homogénéité de dose sur la prostate.

La mise en place de notre méthode devra, comme tout protocole radiothérapeutique, être précédée d'une validation clinique. La radiothérapie est un domaine de la médecine où les résultats cliniques ne peuvent être jugés ni très rapidement, ni très clairement. Il sera donc indispensable de confier à un médecin une étude clinique approfondie, comportant un nombre important de patients afin d'obtenir des données statistiques fiables. C'est alors que l'efficacité de notre protocole pourra être réellement évaluée.

Bibliographie

- [AAB87] A. Ahnesjø, P. Andreo, and A. Brahme. Calculation and application of point spread functions for treatment planning with high energy photon beams. *Acta Oncol.*, 26:49–56, 1987.
- [Ahn87] A. Ahnesjø. Invariance of convolution kernels applied to dose calculations for photon beams. In *Proc. 9th ICCRT*, 1987.
- [And90] P. Andreo. Monte carlo techniques in medical radiation physics. *Phys. Med. Biol.*, 36:861, 1990.
- [Bar90] N.H. Barth. An inverse problem in radiation therapy. *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 18:425–431, 1990.
- [Bat82] K.J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice hall, 1982.
- [BDM74] D. Blanc, A. Dutreix, and J. Mathieu. *Physique de la radiothérapie*. Presses Universitaires de France, 1974.
- [Ber] M. Berger. *Géométrie*. Nathan.
- [BM85] A. Boyer and E. Mok. A photon dose distribution model employing convolution calculations. *Med. Phys.*, 12:169–177, 1985.
- [BM86] A. Boyer and E. Mok. Calculation of photon dose distributions in an inhomogeneous medium using convolutions. *Med. Phys.*, 13:503–509, 1986.
- [Boo62] C. De Boor. Bicubic spline interpolation. *J. of Maths and Physics*, 41:212–218, 1962.
- [Bra88] A. Brahme. Optimization of stationary and moving beam radiation therapy techniques. *Radiotherapy and Oncology*, 12:129–140, 1988.
- [BRL82] A. Brahme, J.-E. Roos, and I. Lax. Solution of an integral equation encountered in rotation therapy. *Phys. Med. Biol.*, 27:1221–1229, 1982.
- [BS] M.S. Bazaraa and C.M. Shetty. *Nonlinear Programming*. John Wiley.

- [BS67] L.J. Bass and S.R. Schubert. On finding the disc of minimum radius containing a given set of points. *Mathematics of Computation*, 21:712–714, 1967.
- [BT85] B.K. Bhattacharya and G.T. Toussaint. On geometric algorithms that use the furthest-point voronoi diagram. *Computational Geometry*, pages 43–61, 1985.
- [BWM88] A.L. Boyer, R. Wackwitz, and E.C. Mok. A comparison of the speeds of three convolution algorithms. *Med. Phys.*, 15:224–227, 1988.
- [CAP88] Y. Censor, M.D. Altschuler, and W.D. Powlis. On the use of cimmino’s simultaneous projections method for computing a solution of the inverse problem in radiation therapy treatment planning. *Inverse Problems*, 4:607–623, 1988.
- [CC81] R.K. Chakraborty and P.K. Chaudhuri. Note on geometrical solution for some minimax location problems. *Trans. Sci.*, 15:164–166, 1981.
- [Cha91] G. Champelebox. *Utilisation de fonctions splines pour la mise au point d’un capteur tridimensionnel sans contact*. Thèse, Grenoble, juillet 1991.
- [Chr85] G. Chrystal. On the problem to construct the minimum circle enclosing n given points in a plane. In *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, volume 3, 1885.
- [Cia85] P.G. Ciarlet. *Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation*. Masson, 1985.
- [Cla41] J.R. Clarkson. A note on depth doses in fields of irregular shape. *Brit. J. Radiol.*, 14:265–268, 1941.
- [CSW72] J.R. Cunningham, P.N. Shrivastava, and J.M. Wilkinson. Program irreg - calculation of dose from irregularly shapes radiation beams. *Comput. Prog. Biomed.*, 2:192–199, 1972.
- [Duc76] J. Duchon. Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 10:5–12, 1976.
- [Duc80] J. Duchon. *Fonctions-spline homogènes a plusieurs variables*. Thèse, Grenoble, février 1980.
- [EH72] J. Elzinga and D.W. Hearn. The minimum covering sphere problem. *Mgmt. Sci.*, 19:96–104, 1972.
- [FB87] C. Field and J.J. Battista. Photon dose calculations using convolution in real and fourier space: assumptions and time estimates. In *Proc. 9th ICCRT*, 1987.
- [Fra67] R.R.L. Francis. Some aspects of a minimax location problem. *Operat. Res.*, 15:1163–1168, 1967.

- [FW74] R.L. Francis and J.A. White. *Facility Layout and Location*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- [GI83] D. Goldfarb and A. Idnani. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. *Mathematical Programming*, 27:1–33, 1983.
- [Gir87] D. Girard. Un algorithme simple et rapide pour la validation croisée généralisée sur des problèmes de grande taille. Rapport de Recherche RR 669-M-, IMAG Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble, mai 1987.
- [GMBF88] G. Le Gall, J.-P. Manens, A. Bouliou, and F. Fresne. Modèle de calcul de la distribution de dose en radiothérapie stéréotaxique. In *XVIIème Congrès de la Société Française des Physiciens d'Hôpital*, 1988.
- [HH67] J.M. Hammersley and D.C. Handscomb. *Les méthodes de Monte Carlo*. Dunod, 1967.
- [HV82] D.W. Hearn and J. Vijay. Efficient algorithms for the (weighted) minimum circle problem. *Operations Research*, 30:777–795, 1982.
- [Jac81] S.K. Jacobsen. An algorithm for the minimax weber problem. *Opnl. Res.*, 6:144–148, 1981.
- [JBR58] H.E. Johns, W.R. Bruce, and W.B. Reid. *Brit. J. Radiol.*, 31:254, 1958.
- [KB90] H.M. Kooy and N.H. Barth. The verification of an inverse problem in radiation therapy. *Int. J. Radiation Oncology Biol. Phys.*, 18:433–439, 1990.
- [KLP89] W. Kahle, H. Leonhardt, and W. Platzer. *Anatomie*. Flammarion, 1989.
- [Kuh75] H.W. Kuhn. Nonlinear programming: A historical view. In *SIAM-AMS Proc.*, volume 9, 1975.
- [Lau72] P.J. Laurent. *Approximation et optimisation*. Hermann, 1972.
- [Law65] C.L. Lawson. The smallest covering cone or sphere. *SIAM Rev.*, pages 415–417, 1965.
- [LDR88] D. Lefkopoulos, J.Y. Devaux, and J.C. Roucayrol. Méthode générale d'optimisation de la distribution des isodoses en radiothérapie par faisceaux de petites dimensions. In *Proceedings of an International Symposium on Dosimetry in Radiotherapy*, volume 1, 1988.
- [Lin90] B.K. Lind. Properties of an algorithm for solving the inverse problem in radiation therapy. *Inverse Problems*, 6:415–426, 1990.
- [LK90] B.K. Lind and P. Källman. Experimental verification of an algorithm for inverse radiation therapy planning. *Radiotherapy and Oncology*, 17:359–368, 1990.

- [Maz90] D.A. Mazal. *Radiothérapie stéréotaxique par petits faisceaux de rayons X de haute énergie: développement des moyens techniques et dosimétriques*. Thèse, Toulouse, juillet 1990.
- [MB74] J. Milan and R.E. Bentley. The storage and manipulation of radiation dose data in a small digital computer. *British Journal of Radiology*, 47:115–121, 1974.
- [Meg83] N. Meggido. Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems. *SIAM J. of Computing*, 12:759–776, 1983.
- [Mel70] J. Melski. Tissue air ratio formulae in cobalt 60 teletherapy dosimetry. *Br. J. Radiol.*, 43:825, 1970.
- [Mel85] R.C. Melville. An implementation study of two algorithms for the minimum spanning circle problem. *Computational Geometry*, pages 267–294, 1985.
- [MLM92] J.-J. Mazeron, T. Locoche, and A. Maugis. *Techniques d'irradiation des cancers*. Vigot, 1992.
- [MSB85] T.R. Mackie, J.W. Scrimger, and J.J. Battista. A convolution method for calculating dose for 15-mv x rays. *Med. Phys.*, 12:188–196, 1985.
- [NC71] K.P.K. Nair and R. Chandrasekaran. Optimal location of a single service center of certain types. *Naval Res. Logist. Quart.*, 18:503–510, 1971.
- [Pai78] L. Paihua. *Quelques méthodes numériques pour le calcul de fonctions spline à une et à plusieurs variables*. Thèse, Grenoble, 1978.
- [Pow85] M.J.D. Powell. On the quadratic programming algorithm of goldfarb and idnani. *Mathematical Programming Study*, 25:46–61, 1985.
- [Rou78] H. Rouvière. *Anatomie humaine*. Masson, 1978.
- [RT57] H. Rademacher and O. Toeplitz. *The Enjoyment of Mathematics*. Princeton University Press, 1957.
- [Sei90] R. Seidel. Linear programming and convex hulls made easy. In *Proc. 6th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 211–215, 1990.
- [SH75] M.I. Shamos and D. Hoey. Closest-point problems. In *Sixteenth Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 151–162, October 1975.
- [Sha78] M.I. Shamos. *Computational Geometry*. PhD thesis, Yale University, May 1978.
- [Shr62] Y.A. Shreider. *The Monte Carlo Method*. Pergamon Press, 1962.
- [Sky] S. Skyum. A simple algorithm for computing the smallest circle. Report DAIMI PB-314, Aarhus University.

- [Sma65] R.D. Smallwood. Minimax detection station placement. *Oper. Res.*, 13:636–646, 1965.
- [Syl57] J.J. Sylvester. A question in the geometry of situation. *Quart. J. Math.*, 1:79, 1857.
- [Syl60] J.J. Sylvester. On poncelet’s approximate linear valuation of surd forms. *Philos. Mag.*, 20:203–222, 1860.
- [TDDJ63] M. Tubiana, J. Dutreix, A. Dutreix, and P. Jockey. *Bases physiques de la radiothérapie et de la radiobiologie*. Masson, 1963.
- [TMB⁺93] J. Troccaz, Y. Menguy, M. Bolla, P. Cinquin, P. Vassal, N. Laieb, L. Desbat, A. Dusserre, and S. Dal Soglio. Conformal external radiotherapy of prostatic carcinoma: requirements and experimental results. *Radiotherapy and Oncology*, 29:176–183, 1993.
- [Utr79] F. Utreras. *Utilisation de la méthode de validation croisée pour le lissage par fonctions splines à une ou deux variables*. Thèse, Grenoble, 1979.
- [Web93] S. Webb. *The physics of three-dimensional radiation therapy*. Institute of Physics Publishing, 1993.
- [Wel91] E. Welzl. Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). *Lecture Notes in Computer Science*, 555:359–370, 1991.
- [WRC70] J.M. Wilkinson, J.A. Rawlinson, and J.R. Cunningham. In *Dosimetry workshop, Hodgkin’s disease*. Radiological Physics Center, Houston, Texas, 1970.
- [ZT91] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *La méthode des éléments finis: formulation de base et problèmes linéaires*. AFNOR technique, 1991.